Denksport

Jahr 0 — 1 € ⇒ Konto 1% p.a.

$\cdot 1{,}01$

Jahr 1 — 1,01 €

Jahr 2 — $1{,}01 + 1\%$ von $1{,}01 = 0{,}0101 + 1{,}01$

$\cdot 1{,}01$

1,0201 €

$\cdot 1{,}01^{\square}$

Jahr 2009 ? — $1{,}01^{2009} = 480.440.853{,}\ldots$ €

S 4/1

$N(t) = k \cdot t + c$

t ... Zeit

$N(t)$ ... Menge

S 4/2

$N(t=0) = N_0$ ... Menge zum Zeitpunkt

S 4/3

$K(20) = K_0 \cdot 1{,}04^{20}$ $(100\,\% + 4\,\%)$

$K(n) = K_0 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{r}^{n}$

$K(n) = K_0 \cdot r^{n}$

Bsp.: Erbschaft 10.000 €

$p = 6\%$ $n = 35$ Jahre

$K(35) = 10.000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{35}$

$K(35) = 10.000 \cdot 1{,}06^{35}$

$K(35) = 10.000 \cdot 7{,}68608$

$K(35) = 76\,860{,}8..$ €

→ S 4/4

$N(t) = N_0 \cdot a^{t} = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

λ .... Lambda

e .... Euler'sche Z.

$= 2{,}71828....$

$N_0 = ?$

$N(2) = 800$

$N(4) = 2500$

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

$$800 = N(2) = N_0 \cdot a^2$$

I: $800 = N_0 \cdot a^2 \quad | :a^2$ $\quad N_0$ und a?

II: $2500 = N_0 \cdot a^4 \quad | :a^4$

$\Rightarrow$ I: $N_0 = \dfrac{800}{a^2}$

II: $N_0 = \dfrac{2500}{a^4}$

$N_0 = N_0$

$$\frac{800}{a^2} = \frac{2500}{a^4} \quad | \cdot a^4 \quad a \neq 0$$

$$8\cancel{00}a^2 = 25\cancel{00}$$

$$a^2 = \frac{25}{8} = 3{,}125$$

$$a = \sqrt{3{,}125}$$

$$a = 1{,}7677\ldots$$

Wachstumsfaktor

$N_0 = \dfrac{800}{3{,}125} = \quad :\mathrm{I}$

$N_0 = \underline{\underline{256}}$

Menge der Bakterien bei $t=0$ (Anfangsmenge) $\Rightarrow$ 76 % Wachstumsrate

Kürzer:

$N(4) = N(2) \cdot a^2$

$25\cancel{00} = 8\cancel{00} \cdot a^2$

$3{,}125 = \dfrac{25}{8} = a^2$

$1{,}7677\ldots = a$ $\Rightarrow N_0$ siehe oben

b) $\Rightarrow$ $N(t) = 256 \cdot 1{,}7677\ldots^t$

$N(9) = 256 \cdot 1{,}7677\ldots^9 = 43158{,}\ldots$ Bakterien

c) 76,8 % / h Wachstumsrate

d) $a^2 = 3{,}125 \;/ 2h$

$1 + 2{,}125$ $\quad$ 212,5 % Wachstumsrate / 2h

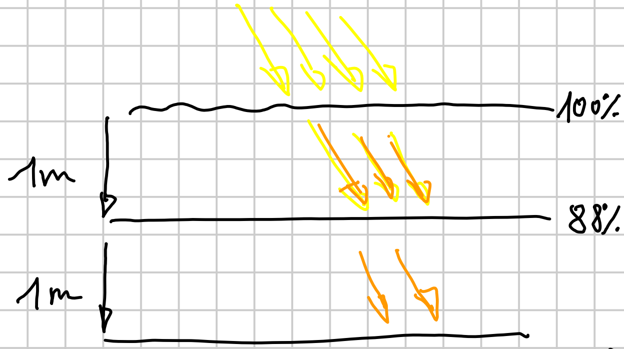
e) $Q = 1{,}7678$ pro Stunde

$_{20}Q = 1{,}7678^{\frac{1}{3}}$ pro 20 min

$= \sqrt[3]{1{,}7678} = 1{,}20912 \Rightarrow 1 + 20{,}9\,\%$

S 4/7

I_0 $\quad -12\,\%$



$I(n) = I_0 \cdot 0{,}88^n$

$\Rightarrow \quad = 100 \cdot 0{,}88^x$ $\quad$ n … Tiefe in m

$0{,}88 \cdot 0{,}88 = 0{,}774..$

$I(10) = I_0 \cdot 0{,}88^{10}$

$= I_0 \cdot 0{,}279.. \Rightarrow 27{,}9\,\%$

Bsp 1.6 S. 4/13

$I_0 = 110$ Cd

$I(x) = I_0 \cdot 0{,}7^x$

Wie viel % Abnahme / m

$\Rightarrow 30\,\%$

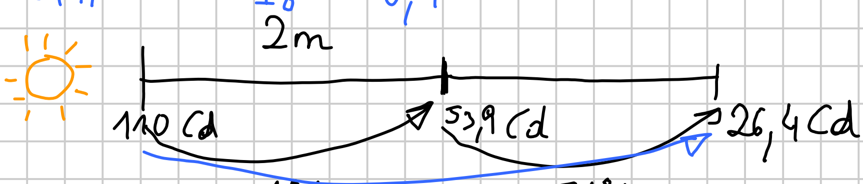
a) $I(2) = 110 \cdot \underbrace{0{,}7^2}_{0{,}49} = 53{,}9$ Cd

$\hookrightarrow 0{,}51 \Rightarrow 51\,\%$ Helligkeit verliert das Licht auf den ersten 2 m.

$I(4) = I(2) \cdot 0{,}7^2$

$= 53{,}9 \cdot 0{,}7^2 = 26{,}4.$

$I(4) = I_0 \cdot 0{,}7^4$



proz.	−51%	−51%
abs	56,1 Cd	27,5 Cd

b) 8m → 10m   −51%

c) 0,7 / m ⇒ a / dm

$$a^{10} = 0{,}7$$
$$a = \sqrt[10]{0{,}7} = 0{,}7^{\frac{1}{10}} = 0{,}9649\ldots$$

Ansatz mit Euler'scher Zahl   5.4.10

$$N(t) = N_0 \cdot a^{t} = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$a = e^{\lambda} \qquad (a)^t = (e^{\lambda})^t \Rightarrow a^t = e^{\lambda \cdot t}$$

$$N_0 = 40.000\,m^3 \qquad N(8) = 50.000\,m^3$$

$$N(8) = 50.000 = \overset{N_0}{40.000} \cdot a^8 = 40.000 \cdot e^{\lambda \cdot 8}$$

$$\frac{5}{4} = a^8 \qquad 50.000 = 40.000 \cdot e^{8\lambda}$$

$$\sqrt[8]{1{,}25} = a \qquad \frac{5}{4} = e^{8\lambda} \quad / \ln$$

$$1{,}02828\ldots = a \qquad \ln\frac{5}{4} = \ln e^{8\lambda}$$

$$\ln\frac{5}{4} = 8\lambda \cdot \underbrace{\ln e}_{1} \quad /:8$$

$$a = e^{\lambda}$$
$$e^{0{,}02789} = 1{,}02828 \qquad \frac{\ln\frac{5}{4}}{8} = \lambda$$

b) ⇒ 2,828 % Wachstum

$$0{,}02789 = \lambda$$

pos. ⇒ Wachstumskonstante
(neg. ⇒ Abnahme / Zerfall)

c) Verdopplungs

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$80.000 = 40.000 \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad \Big| :40000$$

$$2 = e^{\lambda \cdot t} \quad \Big| \ln$$

$$\ln 2 = \lambda \cdot t \cdot \underbrace{\ln e}_{1} \quad \Big| :\lambda$$

Verdoppl. $\boxed{\frac{\ln 2}{\lambda} = t}$

$$24{,}85 = t$$

(Jahre)

⇒ Halbwertszeit τ (Tau)

C_{14} – Methode

$$N(\tau) = \frac{N_0}{2}$$

$$N(\tau) = \cancel{N_0} \cdot e^{\lambda \cdot \tau} = \frac{\cancel{N_0}\ 1}{2} \quad \Big| :N_0$$

$$e^{\lambda \cdot \tau} = \frac{1}{2} \quad \Big| \ln$$

$$\lambda \cdot \tau \cdot \underbrace{\ln e} = \ln \frac{1}{2}$$

$$\lambda \cdot \tau \cdot 1 = \underbrace{\ln 1} - \ln 2$$

$e^x = 1$

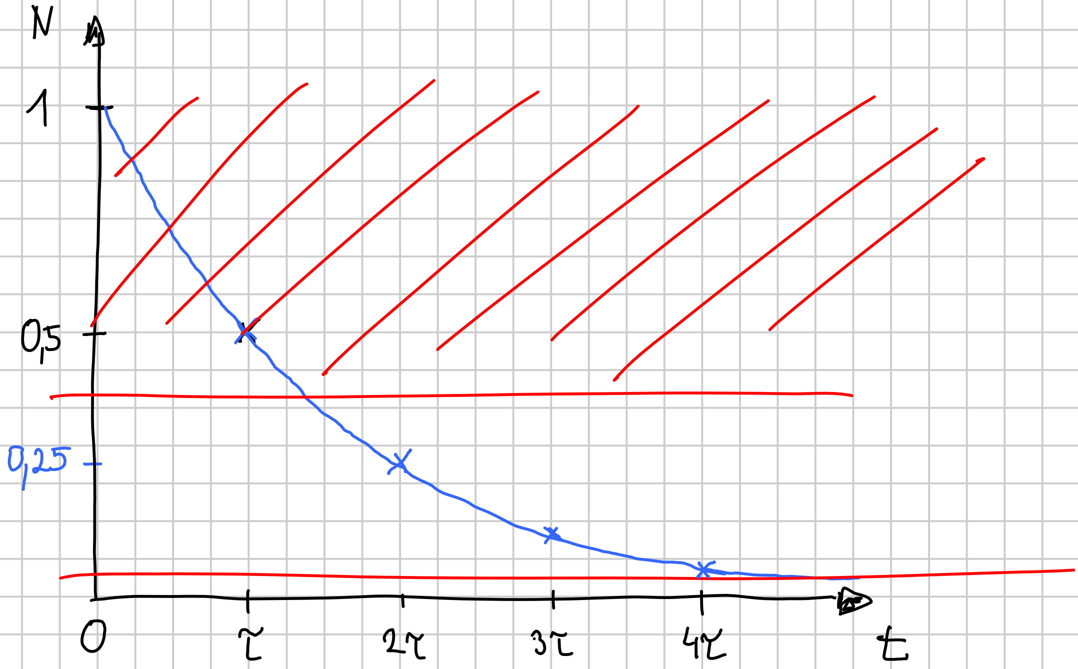
$e^0 = 1$

$$\lambda \cdot \tau = 0 - \ln 2$$

$$\boxed{\lambda = \frac{-\ln 2}{\tau}} \qquad \boxed{\tau = -\frac{\ln 2}{\lambda}}$$

TR 1,209… E−4

⇒ C_{14} $\tau = 5730$ Jahre ⇒ $\lambda = -0{,}0001209\ldots$



Bsp. Jod $\tau = 8$ Tage

$$-\frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \qquad N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$-\frac{\ln 2}{\tau} = \lambda = -0{,}0866\ldots$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}0866 \cdot t}$$

$$\Rightarrow N(1) = N_0 \cdot e^{-0{,}0866 \cdot 1}$$

$$= N_0 \cdot 0{,}917 \qquad \Rightarrow a = 0{,}917$$

$\Rightarrow$ 91,7 % übrig nach einem Tag

$\Rightarrow$ 8,3 % zerfallen Tag

Bsp. Tschernobyl

C_s $\tau = 30 \pm 0{,}5$ Jahren

$\lambda = ?$

$$\lambda = \frac{-\ln 2}{30} = \underline{-0{,}023}104906$$

$$\lambda_1 = -\frac{\ln 2}{30{,}5} = -0{,}0227261$$

$$\lambda_2 = -\frac{\ln 2}{29{,}5} = -0{,}0234965$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}0231 \cdot t} \qquad a = e^{\lambda}$$

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}97716^{t}$$

b) $N(23{,}5) = N_0 \cdot 0{,}97716^{23{,}5} = N_0 \cdot 0{,}581$

4/1986 $\rightarrow$ 11/2009

23,5

$\Rightarrow$ 41,9% von N_0 zerfallen

30	$\rightarrow$	50%
60	$\rightarrow$	25%
90	$\rightarrow$	12,5%
120	$\rightarrow$	6,25%

$$N(t_1) = N_0 \cdot 0{,}1 = N_0 \cdot \frac{10}{100}$$

$$\ln \quad 0{,}1 \cdot \cancel{N_0} = \ln \cancel{N_0} \cdot e^{\lambda \cdot t_1}$$

$$\ln 0{,}1 = \lambda \cdot t_1 \cdot \cancel{\ln e}^{\,1} \quad / : \lambda$$

$$\frac{\ln 0{,}1}{\lambda} = t_1 = 99{,}65 \text{ Jahre}$$

c) $M(t) = M_0 \cdot e^{-0{,}08664 \cdot t}$ $\quad t \ldots$ Tage

$$\lambda = -0{,}08664$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{\ln 2}{\lambda} = 8{,}004 \text{ Tage HWZ}$$

? tägl. %- Abnahme

$$M(1) = M_0 \cdot e^{-0{,}08664 \cdot 1}$$

$$M_0 \cdot 0{,}917 \Rightarrow \text{Abnahme } 8{,}3\%$$