Folgen und Reihen (2)

Denksport/Wiederholung

→ Fibonacci – Zahlen $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

↳ Goldenen Schnitt

→ Kettenbrüche

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \ldots}}}} = 1{,}61\ldots = \phi$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{3}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

Bsp. $$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \ldots}}}} = \underline{\underline{\ln 2}}$$

- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = ?$ 2

- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = ?$ ∞
- $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots = ?$ $\frac{\pi^2}{6}$
- $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots - \ldots = ?$ $\ln 2$
- $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots = ?$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots = ?$ e

Fakultät

Faktorielle

Folge → Reihe

S 7/16

$\langle a_n \rangle = \frac{1}{n} = \langle \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots \rangle$ ⇒ $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

$n \in \mathbb{N}$ Folgenglieder Reihe

(harmonische Reihe)

$S_{10} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} =$

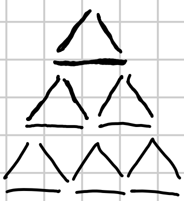
$= S_{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}$ ⇒ $S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

endliche Reihe unendl. Reihe

Arithmetische Folge

Bsp. Kartenhaus

1. Etage (oben): 3 Karten
2. Etage 6 Karten
3. Etage 9 Karten
4. 12



3 Karten
6 Karten $+3$
9 Karten $+3$
12 $+3$
15
⋮

$$\boxed{a_n = \overset{3}{a_1} + (n-1)\cdot \overset{3}{d}}$$

⇒ 10. Reihe $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d$

$a_{10} = 3 + 9 \cdot 3 = \underline{\underline{30}}$

→ Reihe

S_{10} = $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 21 + 24 + 27 + 30$

Alle 10 Etagen

33
33
33
33
33

165 Karten

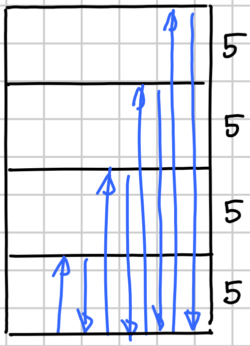
$$S_{10} = (a_1 + a_{10}) \cdot \frac{10}{2}$$

$$\boxed{S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$S_n = (2a_1 + (n-1) \cdot d) \cdot \frac{n}{2}$$

Bsp. Linien·Läufe



$a_1 = 10\,m \qquad d = 10m$

$$S_{100} = (2 \cdot 10 + 99 \cdot 10) \cdot 50$$
$$= 50\,500\,m$$

unendliche arithmetische Folge / Reihe

Bsp $\langle a_n \rangle = \langle 11, 13, 15, 17, 19, \ldots \rangle \Rightarrow S_\infty = 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + \ldots = \infty$

+2 +2 +2 +2

Geometrische Folge

Die Folge der Blendenzahlen des Objektivs eines Fotoapparates ist international durch den Term $b_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$ festgelegt. Berechnen Sie die ersten neun Glieder der Folge und vergleichen Sie diese mit den gerundeten internationalen Werten $\langle 1;\ 1{,}4;\ 2;\ 2{,}8;\ 4;\ 5{,}6;\ 8;\ 11;\ 16 \rangle$.

1	1
2	1.41421
3	2
4	2.82843
5	4
6	5.65685
7	8
8	11.31371
9	16

$b_1 \downarrow \cdot \sqrt{2} = q$

TR: $y = \sqrt{2} \wedge (x-1)$

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

Bsp. Kettenbrief $b_1 = 1$

$q = 5$ (5fache Vervielfältigung)

1.	1
2.	5.
3.	25.
4.	125.
⋮	
10.	

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_{10} = 1 \cdot 5^9 = 1.953.125$ Briefe

$$\sum_{k=1}^{10} 5^{k-1} = 1 + 5 + 25 + \dots + 1.953.125$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_1 \cdot q^{n-1} = \boxed{b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{5^{10} - 1}{5 - 1}$$

$S_{10} = 2.441.406$ Briefe

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + \dots + b_n \overset{?}{=} b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} \overset{?}{=} b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\cancel{b_1} \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \dots q^{n-1}) \overset{?}{=} \cancel{b_1} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad | \cdot (q-1)$$

$$(q-1) \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}) = q^n - 1$$

$$\cancel{q} - 1 + \cancel{q^2} - \cancel{q} + \cancel{q^3} - \cancel{q^2} + q^4 - \cancel{q^3} + - + q^n - \cancel{q^{n-1}} = q^n - 1$$

unendliche geometrische Folge/Reihe

$0,5 - 0,5 \cdot 0,5 = 0,0125$

Bsp. „Halbierungsproblem"

$$S_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

$\cdot \frac{1}{2}$ $\cdot \frac{1}{2}$ $\cdot \frac{1}{2}$ $\cdot \frac{1}{2}$

$$S_\infty = b_1 \cdot \frac{q^\infty - 1}{q - 1}$$

$$S_\infty = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

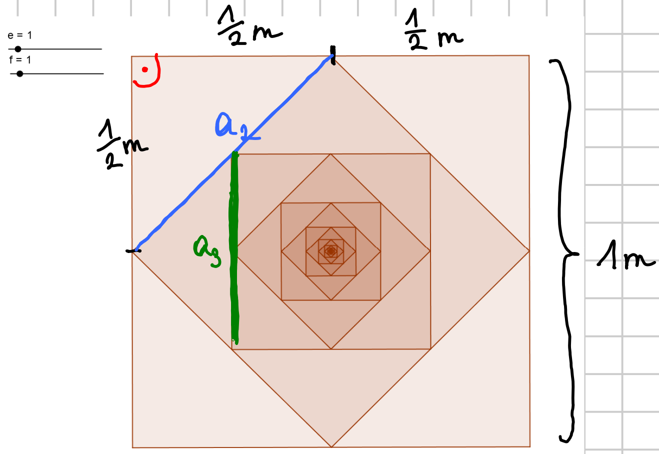
$$|q| < 1 \Rightarrow S_\infty = b_1 \cdot \frac{0 - 1}{q - 1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)}$$

$$-1 < q < 1$$

$$S_\infty = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\boxed{S_\infty = b_1 \cdot \frac{1}{1 - q}}$$

Bsp. „Quadrat in Quadrat"



$a = 1\,m$ Summe aller

$S_\infty = ?$ Flächeninhalte

Seitenlänge

$a_1 = 1\,m$

$a_2 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}$

$\underline{\underline{a_2}} = \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_1^2}{4}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}a_1^2}{\cancel{4}\,2}} = \frac{a_1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}}$

$\sqrt{x^2} = x$

Pythagoras

$\underline{a_3} = \cancel{\ldots} = a_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{a_1 \cdot \frac{1}{2}}$

$A_1 = a_1^2 = 1\,m^2$

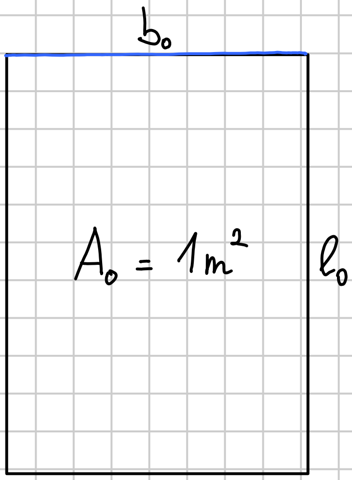
$A_2 = \underline{a_2^2} = \left(\underline{a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 = a_1^2 \cdot \frac{1}{2}$ $\quad \cdot \frac{1}{2}$

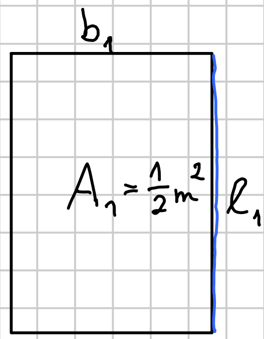
$A_3 = a_3^2 = \left(a_1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = a_1^2 \cdot \frac{1}{4}$ $\quad \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_\infty = A_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 1\,m^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1\,m^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1\,m^2 \cdot 2 = \underline{\underline{2\,m^2}}.$

Die Vorschrift für DIN-Formate lautet: „Je zwei benachbarte Formate gehen durch Halbieren bzw. Verdoppeln der Fläche auseinander hervor. Für die Seitenlängen a und b eines Formats gilt: $(a:b)^2 = 2$. Das Ausgangsformat A_0 hat $1m^2$.“ Berechnen Sie die Seitenlängen auf mm genau bis A_8.





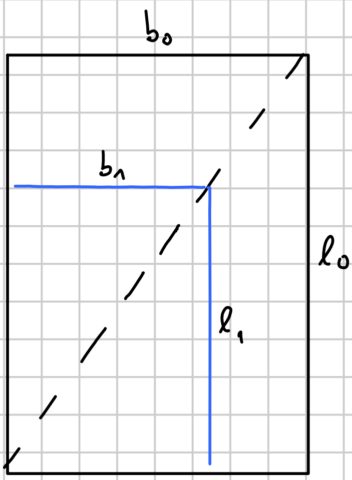
$b_1 \sim l_0$

I: $b_1 = \frac{l_0}{2}$

II: $l_1 = b_0$

$A_0 = l_0 \cdot b_0 = 1m^2 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{l_0}$

$A_1 = l_1 \cdot b_1 = \frac{1}{2} \cdot A_0$ III



$b_0 : l_0 = b_1 : l_1$

$b_0 : l_0 = \frac{l_0}{2} : b_0$

$b_0^2 = \frac{l_0^2}{2}$

$2b_0^2 = l_0^2$

$b_0 \cdot \sqrt{2} = l_0 \Rightarrow \frac{1}{l_0} \cdot \sqrt{2} = l_0$

$\sqrt{2} = l_0^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} = l_0$

$l_0 = \sqrt[4]{2}$ $\qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

$= 1{,}1892\,m$ $\qquad b_0 = 0{,}8408\,m$

$l_0 = 118{,}92\,cm$ $\qquad b_0 = 84{,}08\,cm$

$\downarrow :4$

$l_4 = 29{,}73\,cm$ $\qquad b_4 = 21{,}02\,cm$

$l : b = \sqrt{2} : 1$