Finanzmathematik (2) - Rentenrechnung

Denksport

Der verschwundene Euro

Drei Männer zechen im Wirtshaus. Als sie die Rechnung verlangen, müssen sie insgesamt 30 € bezahlen. Jeder legt einen 10-€-Schein hin. Kurz nachdem die Männer das Wirtshaus verlassen haben, stellt sich heraus, dass in der Karte ein Druckfehler war und dass die Rechnung nur 25 € betragen sollte. Der Wirt schickt einen Kellner hinter ihnen her, der ihnen die 5 € zurückgeben soll. Der Kellner aber ist der Meinung, dass sich 5 € nicht auf 3 Personen aufteilen lassen und behält daher 2 € (als nachträgliches Trinkgeld) für sich. 3 € gibt er den Männern wieder, jeder von ihnen bekommt also einen Euro zurück.
Nun haben die Männer jeweils 9 € für die Zecherei ausgegeben, das sind 27 €, und der Kellner hat 2 € behalten, macht 29 €.

Wo ist der dreißigste Euro geblieben?

Einleitung

Lotto „6er" 4,5 Mio Euro

→ 40 Jahre 112.500 / Jahr

→ 9.375 / Monat

→ ~ 312 / Tag

→ ~20 cent / Min

Wiederkehrende Zahlungen = Renten

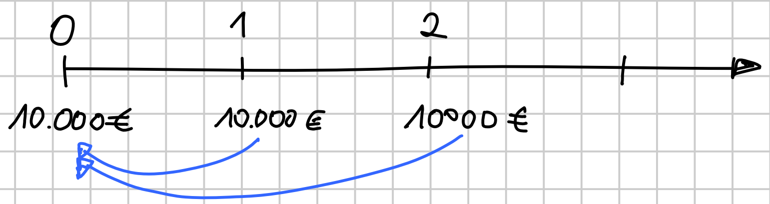
S. 8/24

Autokauf: (A) 10.000 € jedes Jahr für 3 Jahre

(B) 30.000 € sofort

$i = 4\%$ p.a.

$r = 1{,}04 \rightarrow v = \frac{1}{r} = 0{,}9615\ldots$ $\boxed{V}$



Barwert

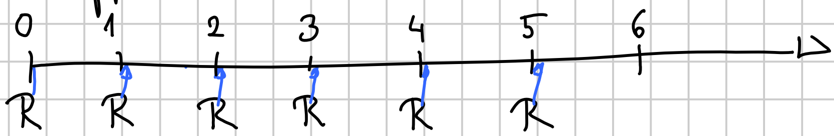
[Endwert]

$$B = 10000\,€ + 10.000\,€ \cdot v + 10.000\,€ \cdot v^2$$
$$B = 10.000\,€ + 9615{,}38\,€ + 9245{,}56\,€$$
$$B = 28860{,}94\,€$$

unterjährig

Bsp. Kaufpreis 150€ od. 6 Monatsraten à 30€ / $i = 5\%$ p.a.

$$v = \frac{1}{r_{12}}$$



B

vorschüssig = am Beginn

nachschüssig = am Ende

$$B = R + R \cdot v + Rv^2 + Rv^3 + Rv^4 + Rv^5$$
$$B = R(1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5)$$

$$\boxed{B = R \cdot \frac{1 - v^6}{1 - v}}$$

vgl. S8/27

geometrische Reihe

$$s_n = b_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

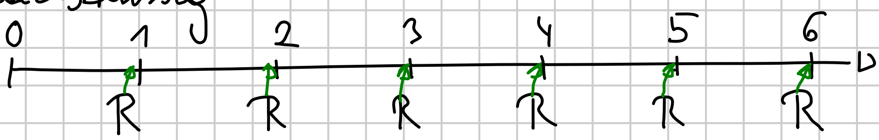
$$B = 30 \cdot \frac{(1 - v_{12}^6)}{(1 - v_{12})}$$

v_{12} Monatsabzinsungsfaktor

$$B = 178{,}18\,€$$

$$v_{12} = \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{r}} = \frac{1}{\sqrt[12]{1{,}05}} = 0{,}9959\ldots \quad \boxed{V}$$

nachschüssig

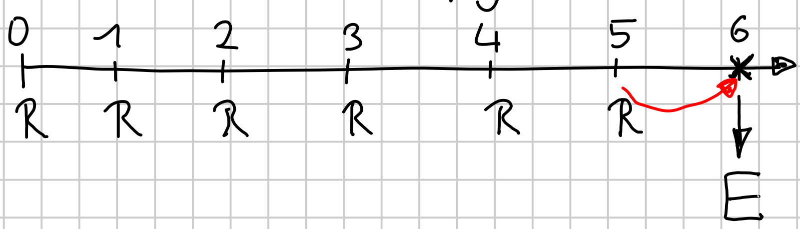


$$B = R \cdot v + R \cdot v^2 + Rv^3 + R \cdot v^4 + R \cdot v^5 + Rv^6$$
$$Rv(1 + v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5)$$

$$B = R \cdot v \cdot \frac{1 - v^6}{1 - v}$$

Bsp. Bausparer Laufzeit = 6 Jahre = n $i = 4\%$

$R = 1200\,€/\text{Jahr}$ $r = 1{,}04$



(Endwert)

$$E = R\cdot r^6 + R\cdot r^5 + R\cdot r^4 + R\cdot r^3 + R\cdot r^2 + R\cdot r$$

$$E = R\cdot r\cdot\left(r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1\right)$$

$$E = R\cdot r\cdot\frac{r^6-1}{r-1} = \underline{\underline{8277{,}95\,€}}$$

b) Einzahlung: $R = 100\,€/\text{monatl.}$ $n = 6\text{ Jahre} = 72\text{ Monate}$

am 1. des Monats

$$r_{12} = \sqrt[12]{1{,}04} = 1{,}0032\ldots$$

$$_vE_{72} = R\cdot r_{12}\cdot\frac{r_{12}^{72}-1}{r_{12}-1} = \left[100\cdot r_{12}\cdot\frac{r_{12}^{72}-1}{r_{12}-1}\right] = 8130{,}99$$

$$\underline{\underline{\approx 8131\,€}}$$

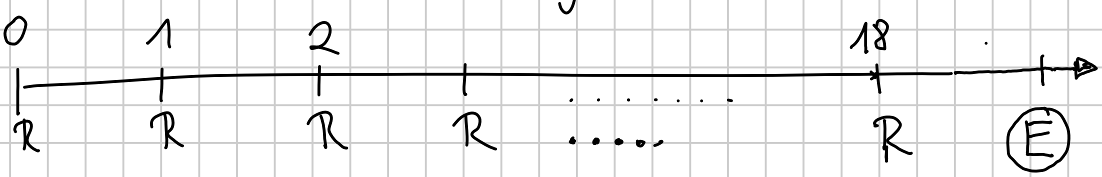
B. 2.3 S. 8/28 250.000 €

$R = 6000\,€$ jährlich zu Jahresbeginn

$\Rightarrow$ <u>Vorschüssig</u>

$n = 18$ Jahre $i = 0{,}05 = 5\%$

$r = 1{,}05$



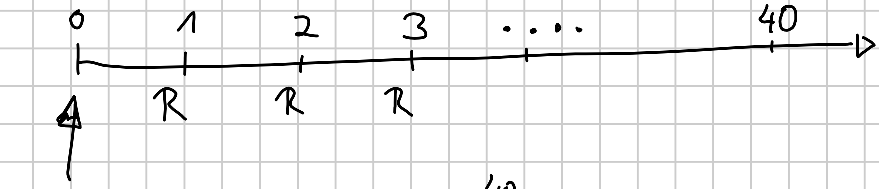
$$_vE_{18} = R\cdot r\cdot\frac{r^{18}-1}{r-1} =$$

250.000 €	
177.234,02 €	Summe Einzahlung
72.765,98 €	

B.2.5.

$R = 250.000\,€$ $\quad n = 40\,J.$ $\quad 8{,}5\%$ $\quad r = 1{,}085$

$v = \frac{1}{r}$



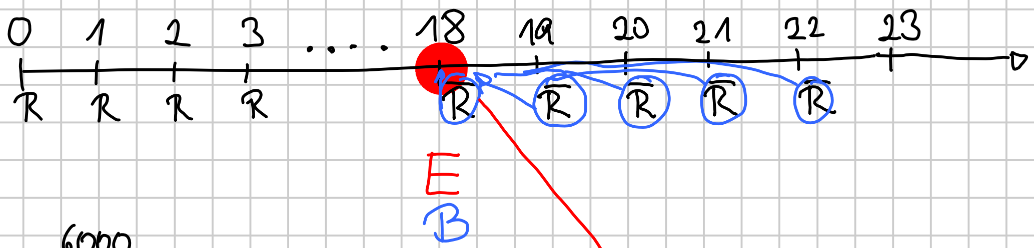
nachschüssig

$${}_{N}B_{40} = R \cdot v \cdot \frac{1 - v^{40}}{1 - v} = 2.828.630{,}08\,€$$

B.2.10.

am Jahresanf. $\quad R = 6000\,€$ $\quad i = 5\%$

$n = 18\,J.$ $\quad r = 1{,}05$



$$\overset{6000}{}\;{}_{v}E_{18} = R \cdot r \cdot \frac{r^{18} - 1}{r - 1} = \underline{\underline{177.234{,}02\,€}}$$

vgl $\quad v = \frac{1}{r}$

$$\overset{45000}{}\;{}_{v}B_{5} = \bar{R} \cdot \frac{1 - v^{5}}{1 - v} = 204.567{,}77\,€$$

Zusatz: Wie viel € pro Jahr kann die Tochter verwenden, um mit dem Ersparten der Eltern 5 Jahre auszukommen?

? $\bar{\bar{R}}$?

$$ {}_{v}E_{18} = {}_{v}B_{5} = \bar{R} \cdot \frac{1 - v^{5}}{1 - v} \quad / \cdot (1-v) \quad / (1-v^{5})$$

$$177.234{,}02 \Rightarrow \frac{{}_{v}B_{5} \cdot (1-v)}{(1-v^{5})} = \bar{\bar{R}} = \underline{38.987{,}23\,€}$$

Bsp. Ziel: ab 65. Lebensjahr 1000€ monatl. vorschüssig 10 Jahre lang.

? jetzt (mit 30): Einzahlung / Monat (35 Jahre lang) am Monatsletzten $i = 5\%$

$$_vB_{120} = R \cdot \frac{1 - v_{12}^{120}}{1 - v_{12}} = 95.151{,}677€ \qquad v_{12} = \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{1{,}05}}$$

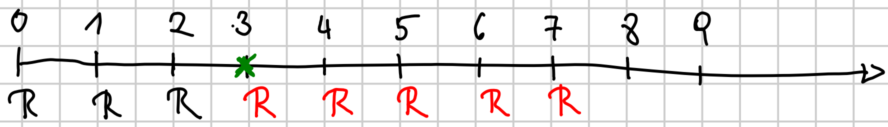
R: 1000€

$$r_{12} = \sqrt[12]{1{,}05}$$

$$_vB_{120} = {}_NE_{420} = \overline{R} \cdot \underbrace{\frac{r_{12}^{420} - 1}{r_{12} - 1}}_{= 1108{,}46}$$

$$\frac{B_{120} \cdot (r_{12} - 1)}{r_{12}^{420} - 1} = \overline{R} = 85{,}84€$$

B2.20 $\quad i = 5\% = 0{,}05 \quad$ 25.000€ $\quad$ vor



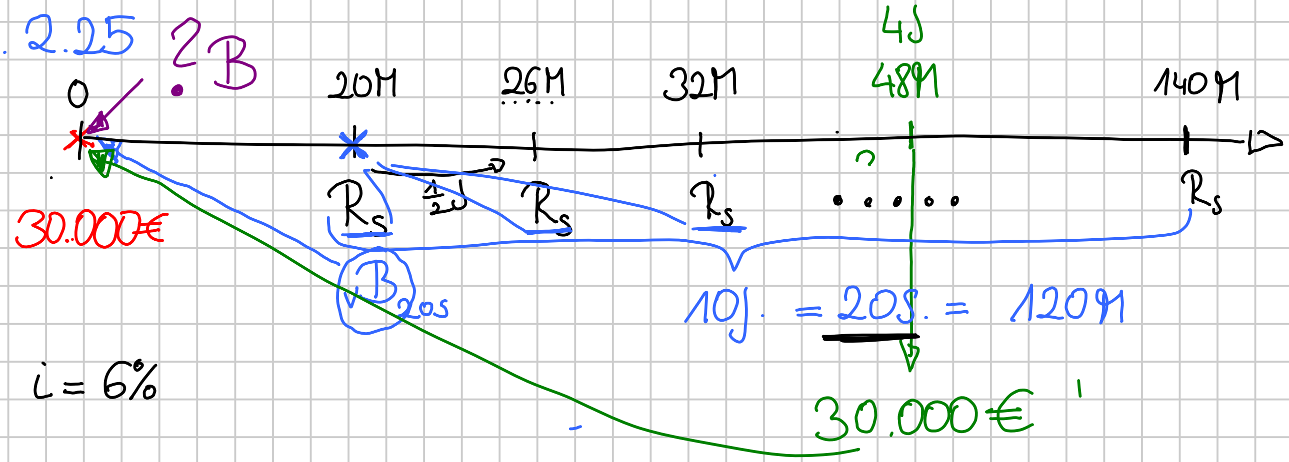
$$_vE_3 = {}_vB_5 \qquad r = 1{,}05$$

$$\boxed{_vE_3} = R \cdot r \cdot \frac{r^3 - 1}{r - 1} = 82.753{,}125€$$

$$_vE_3 = {}_vB_5 = \overline{R} \cdot \frac{1 - v^5}{1 - v} \Rightarrow \overline{R} = \frac{_vB_5 \cdot (1 - v)}{1 - v^5}$$

$$\overline{R} = 18.203{,}70..€$$

B.2.25 ?B



$i = 6\%$

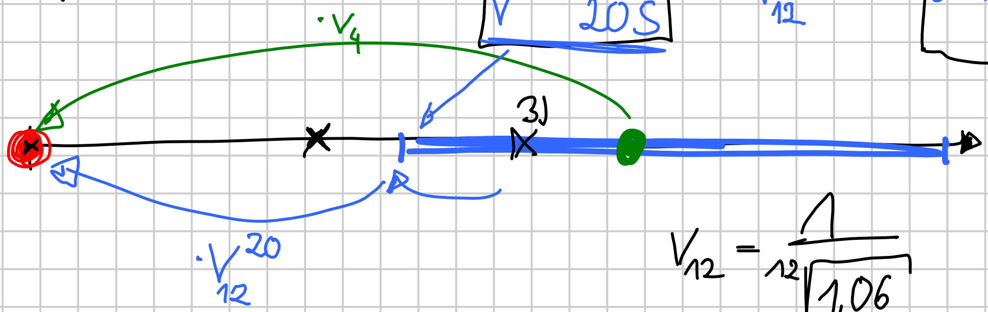
$R_s = 24.000€$

$$B = 30.000 + 30000 \cdot v^4 +$$

(zum Zeitpunkt 0)

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1,06}$$

$$\boxed{{}_vB_{20S}} \cdot v_{12}^{20} = \boxed{24.000 \cdot \frac{1-v_2^{20}}{1-v_2}} \cdot v_{12}^{20}$$

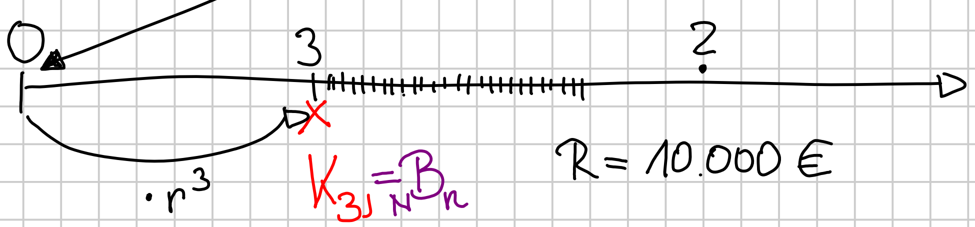


$$v_{12} = \frac{1}{\sqrt[12]{1,06}} \qquad v_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{1,06}}$$

$$B = 30.000 + 23.762,81 + 369104,776 \cdot v_{12}^{20}$$

$$B = 30.000 + 23.762,81 \quad 334.944,7871$$

$$B = 388707,597\ €$$



$K_{3J} = {}_NB_n$ $\qquad R = 10.000\ €$ $\qquad$ nachschüssig

$$K_3 = 388707,597 \cdot 1,06^3 = 462.956,96€$$

$$v_{12} = \frac{1}{\sqrt[12]{1,06}}$$

$${}_NB_n = K_3 = R \cdot v \cdot \frac{1 - v_{12}^n}{1 - v_{12}} \quad \Big| :R \Big| :v$$

$$\frac{K_3}{R\cdot v_{12}} = \frac{1-v_{12}^{\,n}}{1-v_{12}} \quad \Big|\cdot(1-v_{12})$$

$$\frac{K_3(1-v_{12})}{R\cdot v_{12}} = 1-v_{12}^{\,n} \quad \Big| +v_{12}^{\,n} \quad \Big| -$$

$$v_{12}^{\,n} = 1-\frac{K_3(1-v_{12})}{R\cdot v_{12}} \quad \Big| \ln$$

$$n\cdot \ln v_{12} = \ln\left(1-\frac{K_3(1-v_{12})}{R\cdot v_{12}}\right) \quad \Big| : \ln v_{12}$$

$$v_{12} = \frac{1}{\sqrt[12]{1{,}06}} \quad \boxed{V}$$

$$= 0{,}99515\ldots$$

$$n = \frac{\ln\left(1-\frac{K_3\cdot(1-v_{12})}{(R\cdot v_{12})}\right)}{\ln v_{12}}$$

0,22534 $\quad \boxed{A}$

0,77...

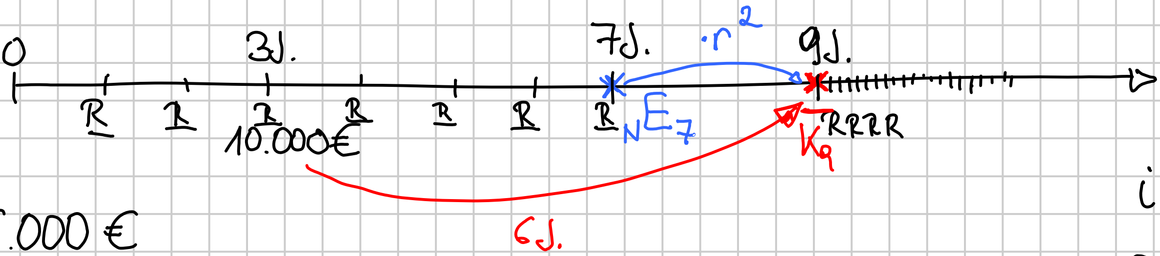
$$n = \frac{-0{,}255339\ldots}{\ln v_{12}} = \underline{\underline{52{,}585}}$$

ABRUNDEN,

$\Rightarrow$ 52 Vollraten

5.2.35

R = 1500 €



$\underline{R} = 6.000$ €

$i = 6\%$

$r = 1{,}06$

$${}_NE_7 = R\cdot\frac{r^7-1}{r-1} = 50.363{,}02\ldots €$$

$$K_9 = {}_NE_7 \cdot 1{,}06^2 = 56.587{,}89\ldots €$$

$$\overline{K_9} = 10.000\cdot 1{,}06^6 = 14.185{,}19 €$$

$\oplus$

$${}_VB_n = 70773{,}08$$

$${}_vB_n = \cancel{R} \cdot \frac{1 - v_{12}^{n}}{\cancel{1 - v_{12}}}$$

$$v_{12} = \frac{1}{\sqrt[12]{r}}$$

$i_2 = 2{,}5\%$

$r_2 = 1{,}025 \Rightarrow r = 1{,}025^2$

$$v_{12} = \frac{1}{\sqrt[6]{1{,}025}} = 0{,}995$$

$$\frac{\ln\left(1 - \frac{{}_vB_n \cdot (1 - v_{12})}{R}\right)}{\ln v_{12}} = n = \frac{-0{,}2153}{\ln v_{12}} = \underline{\underline{52{,}33}}$$

0,19377

0,8062

$\Rightarrow$ 52 Vollraten à 1500 €

$${}_vB_{52} = \boxed{R} \cdot \frac{1 - v_{12}^{52}}{1 - v_{12}} \Rightarrow \boxed{R} = \frac{{}_vB_{52}}{46{,}90}$$

46,90

$\boxed{R}$ = 1508,73 €