Differentialrechnung (2)

Denksport / Aufwärmen

Aus welcher Höhe müsste ein Pkw senkrecht herabfallen, um jene Kräfte freizusetzen, die einem Frontalaufprall des Pkw mit **a)** $80\,\frac{km}{h}$ **b)** $130\,\frac{km}{h}$ **c)** $200\,\frac{km}{h}$ [1] entsprechen?

Anleitung: Die Geschwindigkeit ist in $\frac{m}{s}$ umzurechnen. Anschließend ist das Fallgesetz $s(t) = \frac{g}{2}t^2$ mit $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ und die Tatsache heranzuziehen, dass die Geschwindigkeit die erste Ableitung des Wegs nach der Zeit ist.

$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$

s … Weg
t …. Zeit
g … Erdbeschleunigung $9{,}81\, m/s^2$
v … Geschwindigkeit

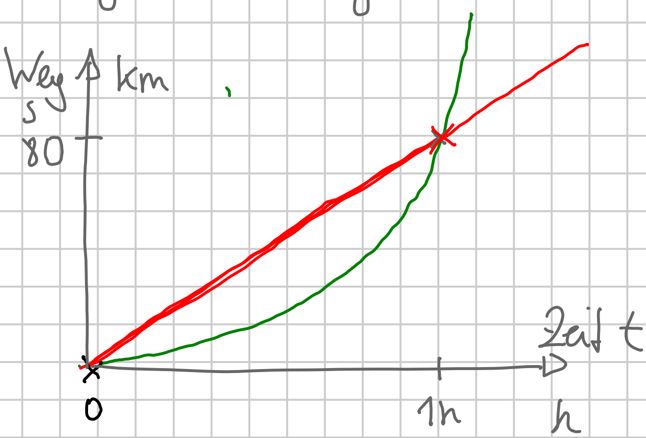
$v = 80\,\frac{km}{h} = \frac{80.000\,m}{3600\,s}$

$= 22{,}2\, m/s$

$s(t) = \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2$

$v(t) = s'(t) = \frac{9{,}81}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}t$

$v(t) = 9{,}81 \cdot t$



$t = 0 \Rightarrow v = 0$

$t = 1\,sek \Rightarrow v = 9{,}81\, m/s \xrightarrow{\cdot 3{,}6} 35{,}316\, km/h$

$t = 2\,sek = v = 9{,}81 \cdot 2 \quad \sim 70\, km/h$

$v = 22{,}2 = 9{,}81 \cdot t \quad | : 9{,}81$

$2{,}26\,sek = t$

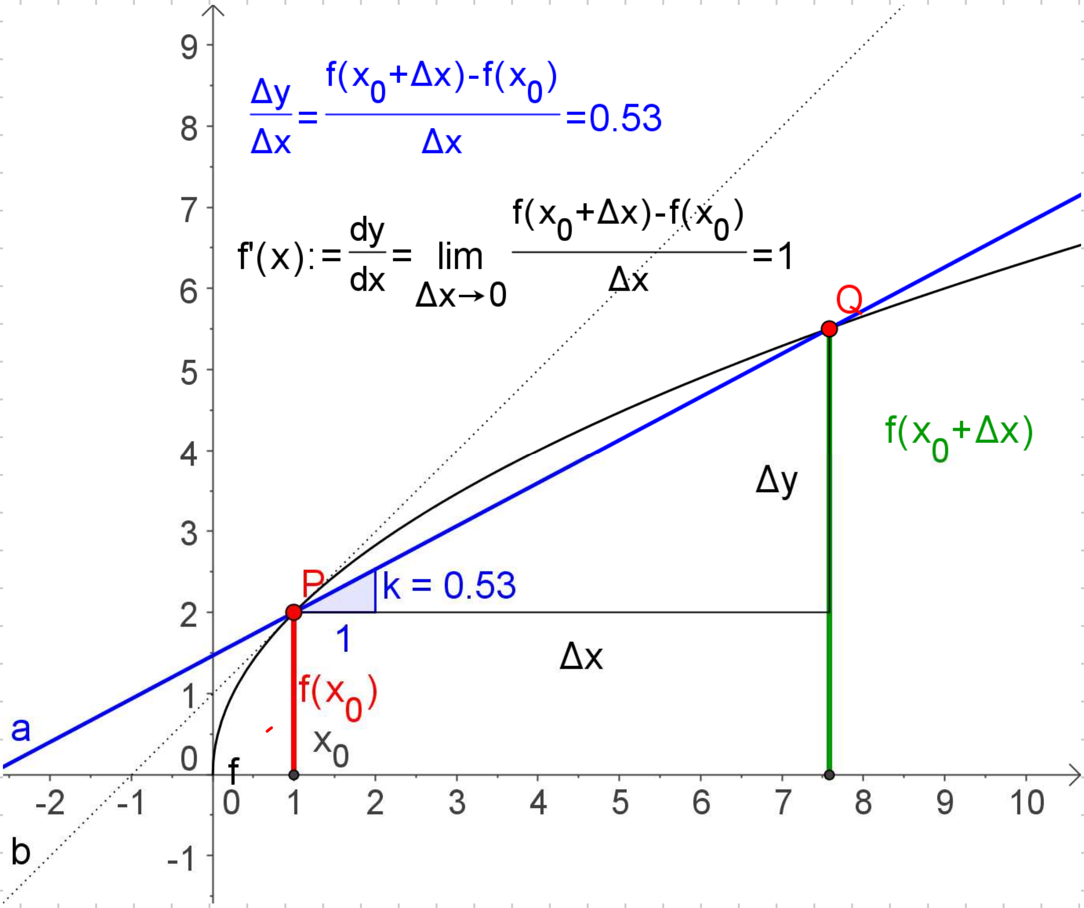
$\Rightarrow$ Weg (Höhe) $s(2{,}26) = \frac{9{,}81}{2} \cdot 2{,}26^2$

$= \underline{\underline{s = 25{,}05\, m}}$

$\Rightarrow$ Ein 80km/h-Aufprall entspricht einem freien Fall aus ca. 25m!

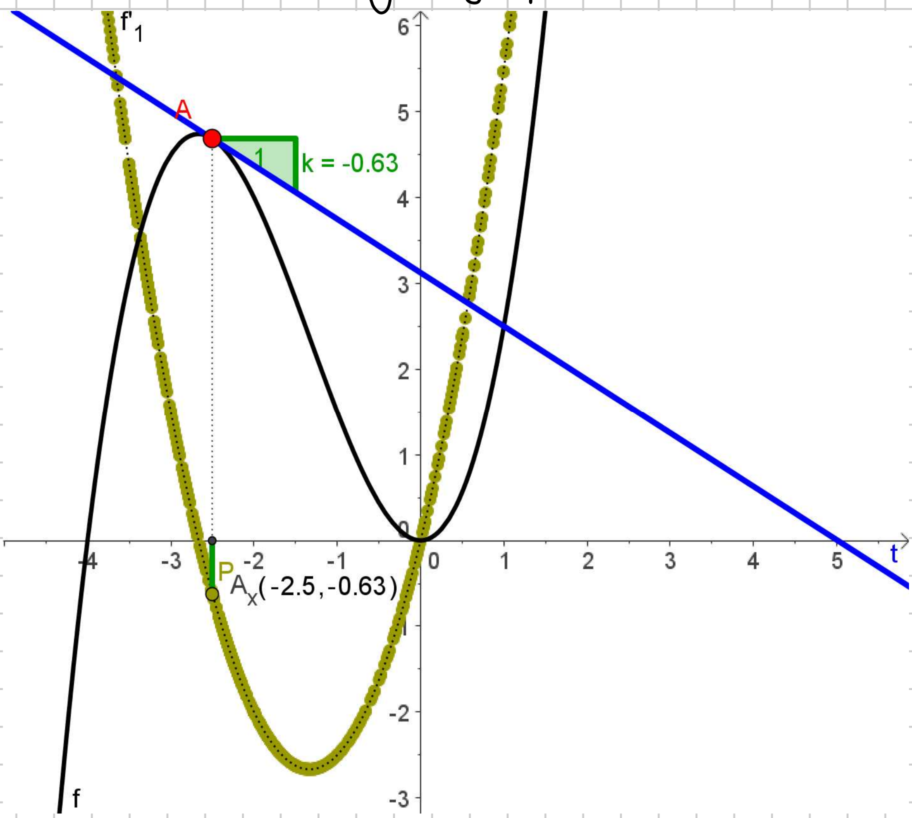
Wiederholung:

Differenzialquotient



$\Rightarrow$ Ableitungsfkt. = 1. Ableitung

= Steigungsfunktion



Ableitungsregeln

(1) Potenzregel

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Bsp $f(x) = x^7 \rightarrow f'(x) = 7x^6$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(2) Konstantenregel

$f(x) = C \rightarrow f'(x) = 0$

Bsp. $f(x) = 7 \rightarrow f'(x) = 0$

$\hookrightarrow$ Steigung 0

(3) Multiplikat. Konstante

$f(x) = C \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = C \cdot g'(x)$

Bsp $f(x) = 7 \cdot x^3 \rightarrow f'(x) = 7 \cdot 3x^2 = 21x^2$

(4) Summen- und Differenzenregel

$f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Bsp. $f(x) = 7x^4 + 11x^2 \rightarrow f'(x) = 28x^3 + 22x$

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = 2x^2 + x$

b) $f(x) = -x^4 - x^3$

c) $f(x) = 7x^5 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{4}{5}x$

d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 10$

e) $f(x) = 1000x^{500} - 650x^{100} + 2500x + 10300$

f) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$

a) $f'(x) = 4x + 1$

b) $f'(x) = -4x^3 - 3x^2$

c) $f'(x) = 35x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{5}$

d) $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x + 1$

e) $f'(x) = 500.000\,x^{499} - 65000\,x^{99} + 2500$

f) $f'(x) = \cancel{\frac{4}{10}}\,\frac{2}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$

Produktregel

Differenzieren Sie die Funktion $h(x) = (x^2 + 2x) \cdot (x^3 - 1)$.

(Problem $x \cdot \sin x$)

$h(x) = x^5 - x^2 + 2x^4 - 2x$

$h(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 - 2x$

$h'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 2x - 2$

$h(x) = \underbrace{(x^2+2x)}_{f} \cdot \underbrace{(x^3-1)}_{g}$

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

$f = x^2 + 2x \qquad f' = 2x + 2$

$g = x^3 - 1 \qquad g' = 3x^2$

$h'(x) = (2x+2) \cdot (x^3 - 1) + (x^2 + 2x) \cdot 3x^2$

$= 2x^4 - 2x + 2x^3 - 2 + 3x^4 + 6x^3$

$h'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 2x - 2$

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen mit der Produktregel:

a) $f(x) = (x^2 + 2x)(x^2 - 1)$

b) $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$

c) $f(x) = x^3(x^4 - 1) = x^7 - x^3$

d) $f(x) = (x - 1)(2x^2 - 2)(2x^3 - 3) =$

c) $f(x) = x^3 \cdot (x^4 - 1)$

$f = x^3 \qquad f' = 3x^2$

$g = x^4 - 1 \qquad g' = 4x^3$

$f'(x) = 3x^2 \cdot (x^4 - 1) + x^3 \cdot (4x^3)$

$= 3x^6 - 3x^2 + 4x^6 =$

$f'(x) = 7x^6 - 3x^2$

d) $f(x) = (x-1)\cdot(2x^2-2)\cdot(2x^3-3)$

$f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'$

$f = x-1 \qquad f' = 1$

$g = 2x^2-2 \qquad g' = 4x$

$h = 2x^3-3 \qquad h' = 6x^2$

$$f'(x) = \underbrace{1\cdot(2x^2-2)\cdot(2x^3-3)} + \underbrace{(x-1)\cdot 4x\cdot(2x^3-3)}_{} + \underbrace{(x-1)\cdot(2x^2-2)\cdot 6x^2}$$

$(4x^2-4x)\cdot(2x^3-3) \qquad (6x^3-6x^2)\cdot(2x^2-2)$

$$f'(x) = 4x^5 - 6x^2 - 4x^3 + 6 + 8x^5 - 12x^2 - 8x^4 + 12x + 12x^5 - 12x^3 - 12x^4 + 12x^2$$

$$f'(x) = 24x^5 - 20x^4 - 16x^3 - 6x^2 + 12x + 6$$

- $f(x) = x \cdot \sin(x)$

$f = x \qquad f' = 1$

$g = \sin x \qquad g' = \cos x$

$$f'(x) = 1\cdot \sin x + x\cdot\cos x$$

[Bem: $(\cos x)' = -\sin x$]

$$f''(x) = \cos x + 1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x) = 2\cos x - x\cdot\sin x$$

- $f(x) = x\cdot e^x$

$f = x \qquad f' = 1$

$g = e^x \qquad g' = e^x$

$$f'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x$$

$$f'(x) = e^x\cdot(1+x)$$

$f = e^x \qquad f' = e^x$

$g = 1+x \qquad g' = 1$

$$f''(x) = e^x\cdot(1+x) + e^x\cdot 1$$

$$f''(x) = e^x\cdot(1+x+1) = e^x\cdot(2+x)$$

- $f(x) = x\cdot\ln x$

$f = x \qquad f' = 1$

$g = \ln x \qquad g' = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1\cdot\ln x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}$$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Quotientenregel

Differenzieren Sie die Funktion $h(x) = \frac{x-1}{x^2}$

$$h(x) = \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = x^{-1} - x^{-2}$$

$$h'(x) = -1 \cdot x^{-2} - (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$$

$$h(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$f = x-1 \qquad f' = 1$

$g = x^2 \qquad g' = 2x$

$$h'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x-1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4}$$

$$= \frac{\cancel{x} \cdot (-x+2)}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{-x+2}{x^3} = -\frac{\cancel{x}^{1}}{x^{\cancel{3}2}} + \frac{2}{x^3}$$

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $\quad f=1 \quad f'=0 \quad g=x \quad g'=1$

$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 15}{x^3 + x^2 + x + 1}$

$f = x^2 - 15 \qquad f' = 2x$

$g = x^3 + x^2 + x + 1 \qquad g' = 3x^2 + 2x + 1$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) - (x^2 - 15) \cdot (3x^2 + 2x + 1)}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{+ \quad (\quad \pm 15)}{\text{Nenner}} =$$

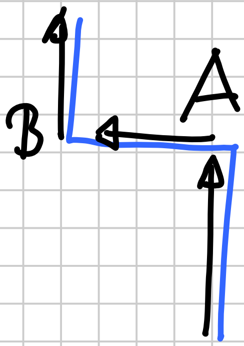
$$f'(x) = \frac{-x^4 + 46x^2 + 32x + 15}{(x^3+x^2+x+1)^2}$$

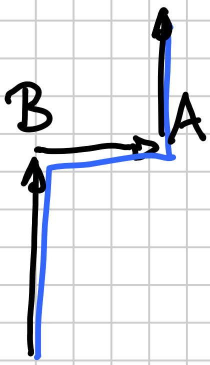
Kettenregel

verkettete Funktionen?

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \bullet^2 \\ \boxed{h(\bullet)} &= 3\bullet + 1 \end{aligned}\right\} \; g \circ h(x) = g(h(x)) = (3x+1)^2$$

x^2 $\quad$ x^2





$$\left[\, h \circ g(x) = h(g(x)) = 3\bullet + 1 \,\right]$$

- $f(x) = (3x+1)^2$ $\qquad$ $f'(x) = ?$ $\qquad$ $f'(x) = 2 \cdot (3x+1)^1 \cdot 3$
  $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$ $\qquad$ $f'(x) = 18x + 6$ $\qquad$ $= 6 \cdot (3x+1)$
- $f(x) = (3x+1)^{700} = (3x+1)^{700}$

$3x+1$ innere Fkt.

$\bullet^{700}$ äußere Fkt

$$f'(x) = 700 \cdot (3x+1)^{699} \cdot 3$$
$$= 2100 \cdot (3x+1)^{699}$$

$$\boxed{\text{Äußere mal innere Abl.}}$$

Kettenregel

- $f(x) = (x^2 + x)^3$

$f'(x) = 3 \cdot (x^2+x)^2 \cdot (2x+1)$

- $f(x) = \sqrt[2]{7x^2-1} = (7x^2-1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (7x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 14x = \frac{7x}{\sqrt[2]{(7x^2-1)^1}}$

- $f(x) = \sin(3x^2)$

$f'(x) = [\cos(3x^2)] \cdot 6x = 6x \cdot \cos(3x^2)$

- $f(x) = e^{(x^2)}$ $\quad f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x \cdot e^{x^2}$
- $f(x) = (e^x)^2$ $\quad f'(x) = 2 \cdot (e^x) \cdot e^x = 2 \cdot (e^x)^2$

$= e^{2x}$ $\quad f'(x) = e^{2x} \cdot 2$ $\quad = 2 \cdot e^{2x}$

- $f(x) = \sin(4x^2+3x)^3$

$f'(x) = [\cos(4x^2+3x)^3] \cdot 3 \cdot (4x^2+3x)^2 \cdot (8x+3)$

- $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ $\quad f = (x+1)^2 \quad f' = 2(x+1) \cdot 1 = 2x+2$

$g = x \quad g' = 1$

$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot x - (x+1)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{\cancel{2x^2}+2x-\cancel{x^2}-2x-1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{x^2-1}{x^2}}}$

- $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$ $\quad f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^1 \cdot \frac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2} =$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{2(x+1)}{x^3}$$

$f = x+1 \qquad f' = 1$

$g = x \qquad g' = 1$

• $$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}$$

$f = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \qquad f' = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x$

$g = x^2 \qquad g' = 2x \qquad f' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x^2 - \sqrt{x^2+1} \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x^4} =$$

$$= \frac{\frac{x^3 - 2x \cdot (x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^4} = \frac{x^3 - 2x^3 - 2x}{x^4 \cdot \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{-x^3 - 2x}{x^4 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{\cancel{x} \cdot (-x^2 - 2)}{x^{\cancel{4}3} \sqrt{x^2+1}} = \frac{-x^2-2}{x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}} = -\frac{x^2+2}{x^3 \sqrt{x^2+1}}$$

Kurvendiskussion

S. 9/27

$f(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^3 + x^2 - 16x - 16)$

1) Definitionsmenge

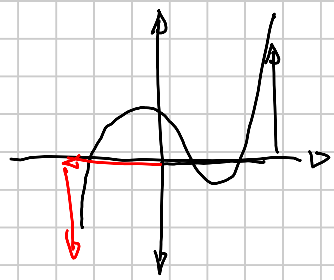
$D = \mathbb{R}$

2) Asymptotisches Verhalten

(Verhalten um $\pm\infty$)

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



3) Ableitungen

$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot (3x^2 + 2x - 16)$

$f''(x) = \frac{1}{6} \cdot (6x + 2)$

$f'''(x) = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$

4) Nullstellen $f(x) = 0$

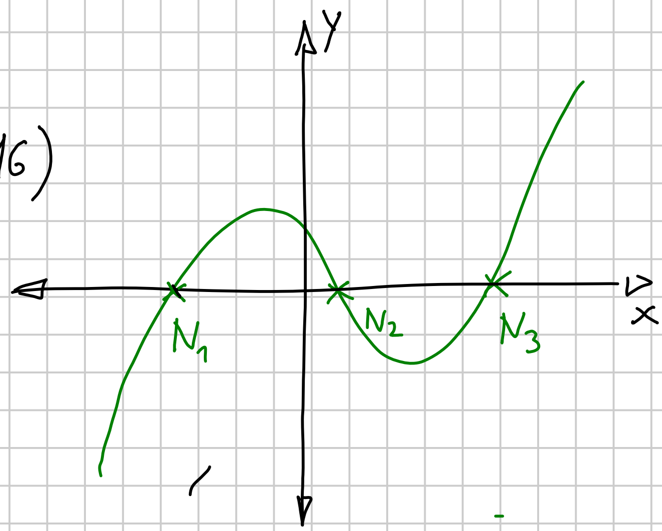
$f(x) = 0 \overset{!}{=} \cancel{\frac{1}{6}} \cdot (x^3 + x^2 - 16x - 16)$

$0 = x^3 + x^2 - 16x - 16$

mögl. Lösungen $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$

? $\cancel{x = 1}$: $1^3 + 1^2 - 16 \cdot 1 - 16 \neq 0$

$x = -1$: $(-1)^3 + (-1)^2 - 16 \cdot (-1) - 16$
✓
$-1 + 1 + 16 - 16 = 0$ ✓



sonst TI82: MATH – SOLVER: $0 = x^3 + x^2 - 16x - 16$

Startwert $x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$

Nullstelle

$\underline{\underline{N_1 = (-1|0)}}$

$\Rightarrow$ ∀ 2 Nullstellen

$x-(-1)$

$$(x^3 + x^2 - 16x - 16) : (x+1) = \underline{x^2 - 16}$$
$$\underline{-x^3 \mp x^2}$$
$$/ \quad / \quad -16x - 16$$
$$\underline{\pm 16x \pm 16}$$
$$0R$$

$\Rightarrow x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x_2 = -4$

$x_3 = +4$

$\underline{\underline{N_2(-4|0)}}$ $\underline{\underline{N_3(4|0)}}$

5) Extrempunkte (Hochpunkt / Tiefpunkt)

Steigung $= 0$

$=$ 1. Ableitung

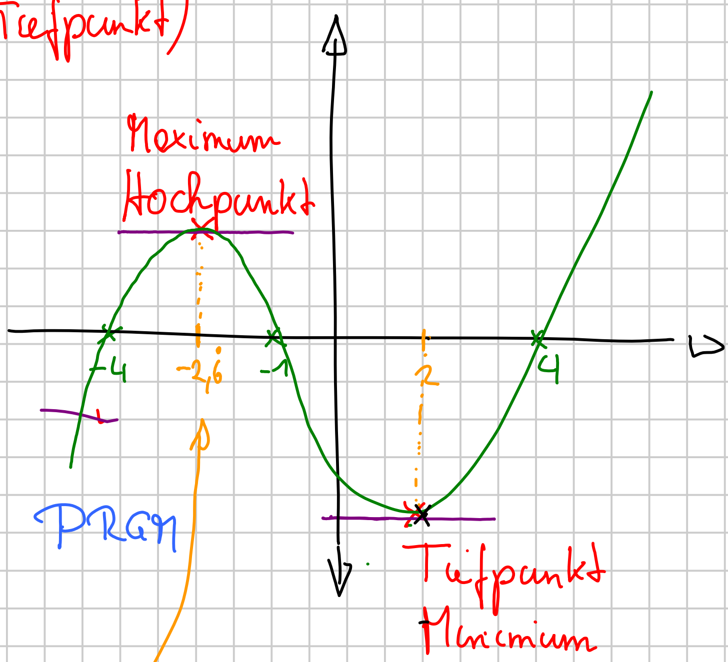
$$\cancel{\tfrac{1}{6}} \cdot (3x^2 + 2x - 16) \overset{!}{=} 0 \quad | : \tfrac{1}{6}$$

$\rightarrow$ ABC – Formel

$A = 3$

$B = 2$

$C = -16$



$x_1 = 2$

$x_2 = -2{,}\dot{6} = -\frac{8}{3}$

$y_1 = f(2) = \frac{1}{6} \cdot (2^3 + 2^2 - 16 \cdot 2 - 16)$

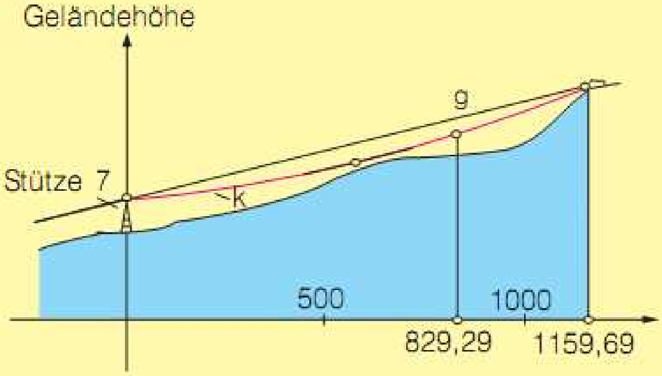
$= -6$

$y_2 = f(-2{,}\dot{6}) = \dots = 2{,}47$

$E_1(2|-6)$

$E_2(-2{,}\dot{6}|2{,}47)$

142 Von der Fa. GLETSCHERBAHN KAPRUN AG wurde das nebenstehende Foto zur Verfügung gestellt. Es zeigt eine Kabine der Luftseilbahn vom Alpincenter (2452 m) zur Gipfelstation (3029 m). Die im Hintergrund sichtbare Stütze ist mit 113,6 m die höchste der Welt. Das durchhängende Seil kann für diesen Teil der Strecke näherungsweise durch die Funktion $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ beschrieben werden.
($a = 0{,}00015$, $b = 0{,}137$, $c = 2668{,}85$)



a) Ist das Seil an der Stelle $x = 829{,}24$ oder $x = 1159{,}69$ steiler?

b) An welcher Stelle hängt das Seil „am Tiefsten" durch?

Anleitung: Im Punkt des größten Durchhangs hat die Kurve k eine zu g parallele Tangente.