Differenzialrechnung

Kosten- und Preistheorie

„Aufwärmen"

1) Welches Ergebnis erhält man, wenn man 20102010 durch 2010 dividiert?
a) 11 b) 101 c) 1001 d) 10001 e) eine andere Zahl

2) Ivan schafft 85% der Punkte beim Test, Tibor erreicht beim selben Test 90%, aber nur um einen Punkt mehr als Ivan. Wie viele Punkte konnte man bei diesem Test höchstens erreichen?
a) 5 b) 17 c) 18 d) 20 e) 25

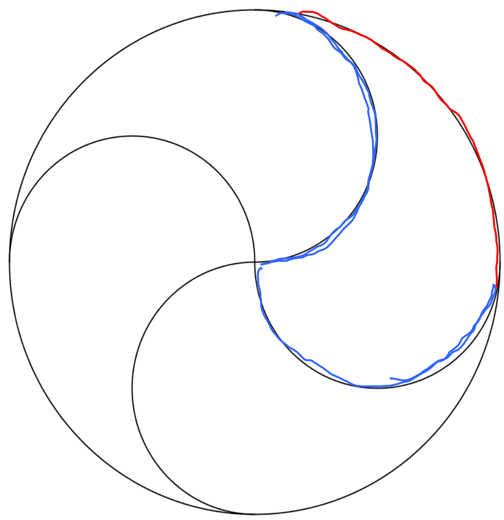
10) Welche der Zahlen a, b, c, d, e ist am größten, wenn gilt:
$a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4 = e - 4$

18) Ein Kreis mit Radius r = 4 cm wird wie abgebildet durch vier Halbkreise mit Radius 2 cm in vier Teile zerlegt. Wie groß ist der Umfang eines dieser Teile?

$u = 2 \cdot r\pi = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$

$u = \frac{2r\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \pi}{4} = 2\pi$

6π



Wiederholung

$K(x) = 0{,}02x^2+43x+1352$ $\quad$ $p(x) = 216-0{,}48x$

Preis/Nachfragefkt.

(1) Cournot'sche Punkt

(2) Max. Gewinn

(3) Max. Erlös + zugehöriger Preis

(4) Gewinnschwellen

1) Cournot'sche Punkt

$(x_{MAX} \mid p(x_{MAX}))$

$G(x) = E(x) - K(x) = x \cdot p(x) - K(x)$ $\quad$ Gewinnfunktion

$G(x) = x \cdot (216 - 0{,}48x) - (0{,}02x^2 + 43x + 1352)$

$G(x) = 216x - 0{,}48x^2 - 0{,}02x^2 - 43x - 1352$

$G(x) = -0{,}5x^2 + 173x - 1352$

$G'(x) = -1x + 173 \overset{!}{=} 0$

$\underline{\underline{173\,ME = x}}$ $\quad \Rightarrow p(173) = 216 - 0{,}48 \cdot 173$

$= \underline{\underline{132{,}96\,GE}}$

Cournot'scher Punkt $(173\,ME \mid 132{,}96\,GE/ME)$

2) Max. Gewinn

$\Rightarrow G(173) = -0{,}5 \cdot 173^2 + 173 \cdot 173 - 1352$

$\underline{\underline{G_{MAX} = 13.612{,}5\,GE}}$

3) Max. Erlös

$E(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (216 - 0{,}48x) = 216x - 0{,}48x^2$

$E'(x) = 216 - 0{,}96x \overset{!}{=} 0$ $\quad$ 225 $\quad$ 225

$216 = 0{,}96x$

$\underline{\underline{225 = x}}$ $\quad \Rightarrow E(225) = 24300\,GE$

$p(225) = 216 - 0{,}48 \cdot 225 = 108$ GE/ME

4) Gewinnschwellen

$G(x) = -0{,}5x^2 + 173x - 1352 \overset{!}{=} 0$

TI82 A, B, C

$x_1 = 8$ ME $x_2 = 338$ ME

Gewinnbereich: $[8 ; 338]$

Ein Monopolist erzielt bei einem Verkaufspreis von 1[illegible] und einer Produktionsmenge von 1[illegible] den maximalen Gewinn von 13612,5 GE. Bei einem Verkaufspreis von 53,4 GE/ME würde der Betrieb bei einer Produktionsmenge von 260 ME zum Grenzbetrieb.

$$K(x) = a \cdot x^2 + bx + c \qquad p(x) = kx + d$$

$$\text{I}: \quad p(173) = 132{,}96 = k \cdot 173 + d$$

$$\text{II}: \quad G'(173) = 0 = 2 \cdot (k-a) \cdot 173 + d - b$$

$$\text{III}: \quad G(173) = 13612{,}5 = (k-a) \cdot 173^2 + (d-b) \cdot 173 - c$$

$$\text{IV}: \quad [p(260) = 53{,}4] \quad \overline{K}(260) = 53{,}4 = a \cdot 260 + b + \frac{c}{260}$$

$$\text{V}: \quad \overline{K}'(260) = 0 = a - \frac{c}{260^2}$$

zum Begriff: „Grenzbetrieb"

→ Stückkosten $\quad \overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$

$$\overline{K}(x) = ax + b + \frac{c}{x}$$

Minimum der Stückkosten (billiger geht's nicht!)

$$\overline{K}'(x) = a - \frac{c}{x^2}$$

$$G(x) = E(x) - K(x) = x \cdot p(x) - K(x)$$

$$= x \cdot (k \cdot x + d) - (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$

$$= k \cdot x^2 + d \cdot x - ax^2 - bx - c$$

$$G(x) = (k-a) \cdot x^2 + (d-b) \cdot x - c$$

$$G'(x) = 2 \cdot (k-a) \cdot x + d - b$$

$$\text{I}: \quad d + 173k = 132{,}96$$

$$\text{II}: \quad -346a - b + d + 346k = 0$$

$$\text{III}: \quad -173^2 a - 173b - c + 173d + 173^2 k = 13612{,}5$$

$$\text{IV}: \quad 260a + b + \frac{1}{260} \cdot c = 53{,}4$$

$$\text{V}: \quad a - \frac{1}{260^2} \cdot c = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 173 \\ -346 & -1 & 0 & 1 & 346 \\ -173^2 & -173 & -1 & 173 & 173^2 \\ 260 & 1 & \frac{1}{260} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{260^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 132{,}96 \\ 0 \\ 13612{,}5 \\ 53{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5x5 Matrix A

$A^{-1} * b =$

$a = 0{,}02$

$b = 43$

$c = 1352$

$d = 216$

$k = -0{,}48$

$K(x) = 0{,}02x^2 + 43x + 1352$

$p(x) = -0{,}48x + 216$

Matura-Beispiele - Bsp. 9 (Kopie)

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\qquad \overline{K}(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$K''(x) = 6ax + 2b$

Kostenkehre 18 Stück → Grenzkosten 1026 €/Stk.

→ Stückkosten 2.025 €/Stk.

Produktionsstillstand → Kosten 12.150 €

↓

Fixkosten

$$\text{I: } \cancel{K(0) = 12150 = d}$$

$$\text{II: } K''(18) = 0 = 6a \cdot 18 + 2b$$

$$\text{III: } K'(18) = 1026 = 3 \cdot a \cdot 18^2 + 2 \cdot b \cdot 18 + c$$

$$\text{IV: } \overline{K}(18) = 2.025 = a \cdot 18^2 + b \cdot 18 + c + \frac{12150}{18}$$

$$\text{II} \quad 0 = 108a + 2b \qquad |\cdot(-9)$$

$$\text{III} \quad 1026 = 972a + 36b + c$$

$$\text{IV: } \cancel{2025}\ 1350 = 324a + 18b + c + 675 \qquad -$$

$$-324 = 648a + 18b$$

$$\text{II: } 0 = -972a - 18b \qquad +$$

$$-324 = -324a \qquad |:(-324)$$

$$\underline{\underline{1 = a}}$$

$$\Rightarrow \text{II: } 0 = 108 \cdot 1 + 2b \rightarrow \underline{\underline{b = -54}}$$

$$\Rightarrow \text{III: } 1026 = 972 \cdot 1 + 36 \cdot (-54) + c$$

$$\underline{\underline{1998 = c}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K(x) = x^3 - 54x^2 + 1998x + 12150}}$$

b) $p(x) = -40x + 4520$

Höchstpreis: $p(0) = -40 \cdot 0 + 4520 = \underline{\underline{4520\ €}}$

Angebot/Nachfrage

Sättigungsmenge: $p(x) = 0 = -40x + 4520$

$40x = 4520$

$\underline{\underline{x = 113 \text{ Stück}}}$

Matura 2007

Für eine Firma konnte aufgrund von Beobachtungen folgende Tabelle ermittelt werden.

Produktionsmenge	8	12	15
Grenzkosten	92,6	223,8	360

Ermittle die Kostenfunktion 3. Grades, wenn die Gesamtkosten für x=10 ME 550 GE betragen

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

I: $K'(8) = 92{,}6 = 3a \cdot 8^2 + 2b \cdot 8 + c$

II: $K'(12) = 223{,}8 = 3a \cdot 12^2 + 2b \cdot 12 + c$

III: $K'(15) = 360 = 3a \cdot 15^2 + 2b \cdot 15 + c$

IV: $K(10) = 550 = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c10 + d$

$$A = \begin{pmatrix} 192 & 16 & 1 & 0 \\ 432 & 24 & 1 & 0 \\ 775 & 30 & 1 & 0 \\ 1000 & 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 92{,}6 \\ 223{,}8 \\ 360 \\ 550 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} * b$

$\Rightarrow K(x) = 0{,}6x^3 - 1{,}6x^2 + 3x + 80$

b) Nachfragefunktion: $p(x) = -0{,}06x^2 - 0{,}3x + 250$

? max. Gewinn

↳ Verkaufspreis / Verkaufsmenge

Beispiel zur Kosten und Preistheorie

Ein Betrieb kennt folgende Daten:

Die Fixkosten betragen 3500 €. Bei einer Produktionsmenge von 24 ME entstehen Kosten in der Höhe von 28844 €, bei 10 ME 14900 €. Die Kostenkehre liegt bei $\frac{40}{3}$ ME

Die lineare Nachfragefunktion hat einen Marktsättigungswert von 96 ME., der Höchstpreis beträgt 2400 €/ME.

(a) Zeigen Sie, dass die Kostenfunktion sich am besten durch $x^3 - 40x + 1440x + 3500$ beschreiben lässt!

(b) Erstellen Sie die lineare Nachfragefunktion

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$K''(x) = 6ax + 2b$$

I: $K(0) = 3500 = d$

II: $K(24) = 28844$

III: $K(10) = 14900$

IV: $K''\left(\frac{40}{3}\right) = 0$

I: $d = 3500$

II: $28844 = a \cdot 24^3 + b \cdot 24^2 + c \cdot 24 + 3500$

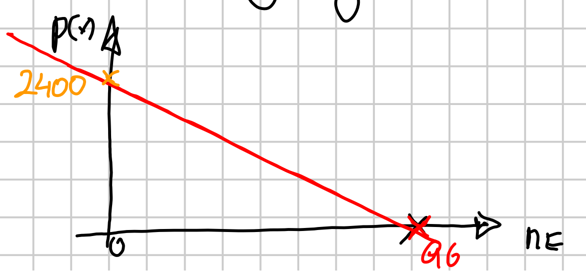
III: $14900 = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 3500$

IV: $0 = \cancel{6}^{2} a \cdot \frac{40}{\cancel{3}} + 2b$

$$A = \begin{pmatrix} 24^3 & 24^2 & 24 \\ 1000 & 100 & 10 \\ 80 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 25344 \\ 11400 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K(x) = x^3 - 40x^2 + 1440x + 3500$$

b) Marktsättigung bei 96 ME / Höchstpreis bei 2400 €/ME



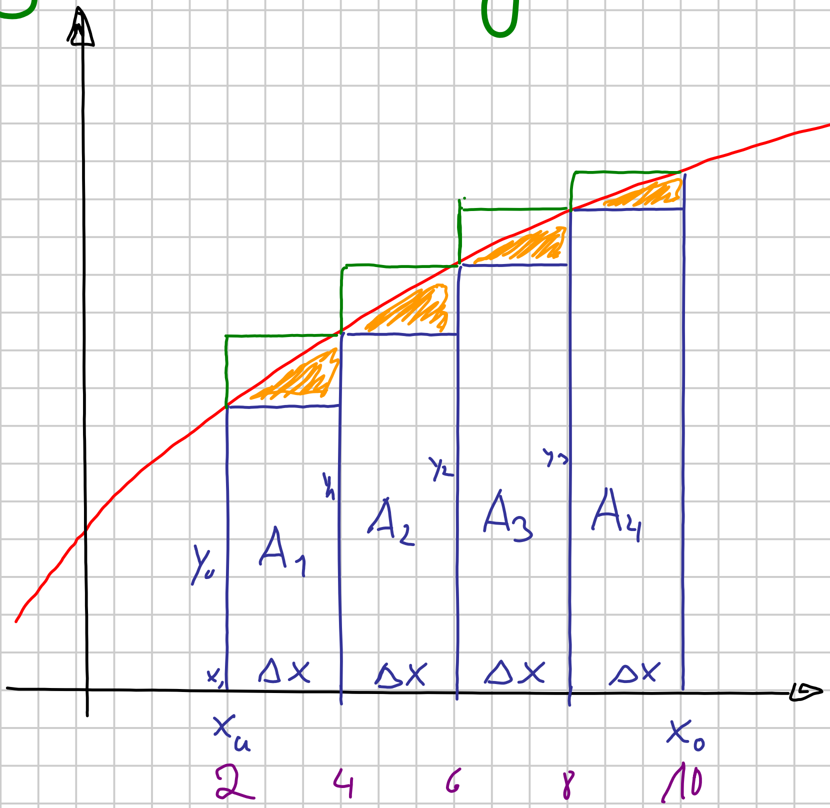
$$p(x) = kx + d$$

$d = 2400$ € (Höchstpreis)

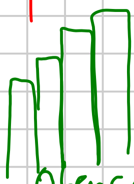
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2400}{96} = -25$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = -25x + 2400 = 2400 - 25x$$

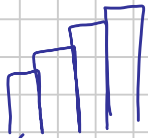
Integralrechnung



$f(x)$



Obersumme OS



Untersumme US

US < Fläche < OS

$A_1 = \quad y_0 \cdot \Delta x \quad = \quad f(x_0) \cdot \Delta x$

$A_2 = \quad f(x_1) \cdot \Delta x$

$A_3 =$

$US = f(x_0) \cdot \underline{\Delta x} + f(x_1) \cdot \underline{\Delta x} + f(x_2) \cdot \underline{\Delta x} + f(x_3) \cdot \underline{\Delta x}$

$\Delta x \cdot \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \right)$

$\Delta x \cdot \sum_{i=0}^{3} f(x_i) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \cdot \Delta x$

$OS = \ldots \qquad \sum_{i=1}^{4} f(x_i) \cdot \Delta x$

$\Rightarrow$ Integral $\qquad \int f(x) \cdot dx$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Integrationsregeln

Ableiten $\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}$

$$\int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3}$$

Integrieren

$\frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}}$

$$\int x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{4}$$

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$