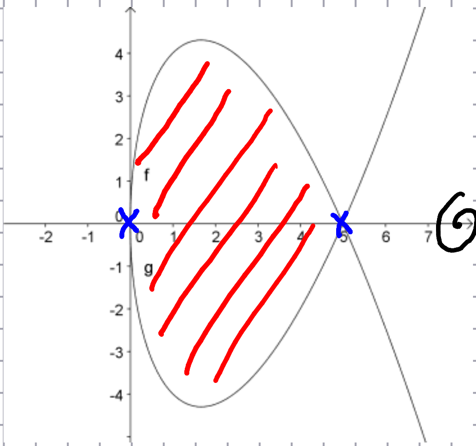
Zwiebel

Donnerstag, 22. April 2010
16:33

Eine Zwiebel kann durch die Rotation der Kurve k um die x-Achse dargestellt werden. Wie groß ist das "Zwiebelvolumen"?

$$k: y = (5 - x) \cdot \sqrt{x}$$



6

$$V = \pi \cdot \int_{UG}^{OG} y^2 \cdot dx$$

Grenzen = Nullstellen

$$(5-x) \cdot \sqrt{x} = 0$$

$$5 - x = 0 \quad \text{oder} \quad \sqrt{x} = 0$$

$$x = 5 \qquad\qquad x = 0$$

$$N_1(5|0) \qquad\qquad N_2(0|0)$$

$$y^2 = (5-x)^2 \cdot \sqrt{x}^2$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^5 (5-x)^2 \cdot x \cdot dx \quad = \pi \cdot fnInt((5-x)^2 \cdot x, x, 0, 5)$$

$$= \pi \cdot \int_0^5 (25 - 10x + x^2) \cdot x \cdot dx = \pi \cdot \int_0^5 25x - 10x^2 + x^3 \cdot dx$$

$$= \pi \cdot \left(25 \cdot \frac{x^2}{2} - 10 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^5 =$$

$$= \pi \cdot \left(25 \cdot \frac{5^2}{2} - 10 \cdot \frac{5^3}{3} + \frac{5^4}{4} - 0\right) = \pi \cdot 52{,}08\dot{3} \ E^3$$

$$= 163{,}62 \ E^3$$

Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation des Flächenstücks, das von den Funktionen f und g begrenzt wird, um die x- bzw. y-Achse entsteht und berechnen Sie das Verhältnis der Volumina:

a) $f(x) = \sqrt{8x}$ $\qquad g(x) = \frac{2x+8}{3}$

b) $f: 9x^2 + 16y^2 = 144$ $\qquad g: 3x + 4y = 12$

c) $f: x^2 + y^2 = 25$ $\qquad g: y^2 = \frac{16}{3}x$

d) $f: y^2 = 16(x-4)$ $\qquad g: y^2 = 8x$

e) $f: 3x^2 + 4y^2 = 12$ $\qquad g: y^2 = \frac{9}{4}x$

Schnittpunkte

$3x^2 + 4\cdot\frac{9}{4}x = 12$

$3x^2 + 9x - 12 = 0 \quad | :3$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

↳ $x_1 = -4 \Rightarrow y_1 = \cancel{\ }$

↳ $x_2 = 1$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$

$\Rightarrow S\left(1 \middle| \frac{3}{2}\right) \qquad R\left(1 \middle| -\frac{3}{2}\right)$

Nullstellen

$3x^2 + 4\cdot 0^2 = 12$

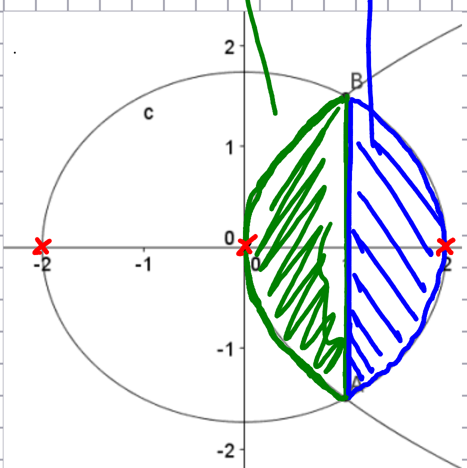
$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$y^2 = \frac{9}{4}\cdot(\cancel{-4})$

$y^2 = -9$

$y^2 = \frac{9}{4}x$ $\qquad 3x^2 + 4y^2 = 12$



$V_x = \pi\cdot\int y^2\cdot dx$

$V_x = \pi\cdot\int_0^1 \frac{9}{4}x\cdot dx + \pi\cdot\int_1^2 \frac{12-3x^2}{4}\cdot dx$

$= \pi\cdot \mathrm{fnInt}\left(\frac{9}{4}x, x, 0, 1\right) + \pi\cdot \mathrm{fnInt}\left(\frac{12-3x^2}{4}, x, 1, 2\right)$

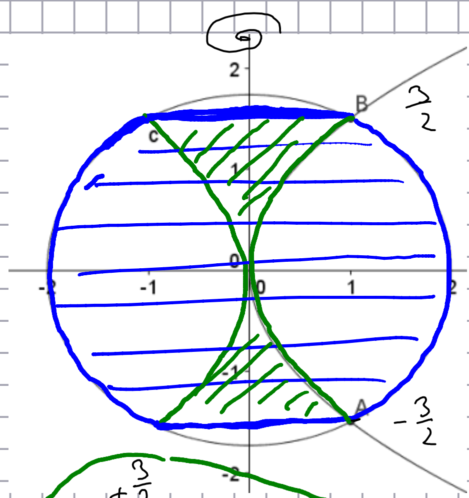
$= \pi\cdot 1{,}125 + \pi\cdot 1{,}25 = 2{,}275\pi E^3$

Rotationskörper (2)

Donnerstag, 22. April 2010
18:40

$$V_y = \pi \cdot \int x^2 \cdot dy$$

$$3x^2 + 4y^2 = 12$$
$$3x^2 = 12 - 4y^2$$
$$x^2 = \frac{12 - 4y^2}{3}$$



$$y^2 = \frac{9}{4}x$$
$$4y^2 = 9x$$
$$\frac{4y^2}{9} = x$$
$$\frac{16y^4}{81} = x^2$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} \frac{12 - 4y^2}{3} \cdot dy \quad - \quad \pi \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{+\frac{3}{2}} \frac{16y^4}{81} \cdot dy$$

$$V_y = \pi \cdot 9 \quad - \quad \pi \cdot 0{,}6 \quad = 8{,}4 \cdot \pi \; E^3$$

$$V_x : V_y$$
$$2{,}275 \cdot \cancel{\pi} : 8{,}4 \cdot \cancel{\pi} \quad \Big| : 2{,}275$$
$$1 : 3{,}69\ldots$$

IFI

Beispiel

Donnerstag, 22. April 2010
18:00

Die Form eines Blechstückes wird über zwei Polynomfunktionen ermittelt:

f: $f(x) = 0{,}125x^4 - 1{,}5x^3 + 6x^2 - 9x + 2$

Funktion g ist eine Funktion 3. Grades und berührt f bei x=2. g Weiteres kennt man den Punkt P(0/-3) und die Nullstelle bei x= -2.

a) Stellen Sie die Funktion g auf!
b) Zeichnen Sie beide Funktionen im Intervall [-1 ; 6]
c) Berechnen Sie die Fläche des Blechstückes! (x, y in dm)
d) Das Blech wird aus einer Rechteckvorlage ausgeschnitten (Tangente vom H_g ist Oberkante).Bestimmen Sie die Abmessungen und den prozentuellen Verschnitt!

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$g''(x) = 6ax + 2b$

$B(2|-2)$

$f(2) = 0{,}125 \cdot 2^4 - 1{,}5 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2$

I: $B \in g$: $g(2) = -2$

II: B berührt $\Rightarrow$ $f'(2) = g'(2)$ (gleiche Steigung)

III: $P \in g$: $g(0) = -3$

IV: $x = -2$ Nullstelle $\Rightarrow$ $g(-2) = 0$

$f'(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 12x - 9$

$f'(2) = 1$

I: $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -2$

II: $3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 1$

III: $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = -3$

IV: $a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = 0$

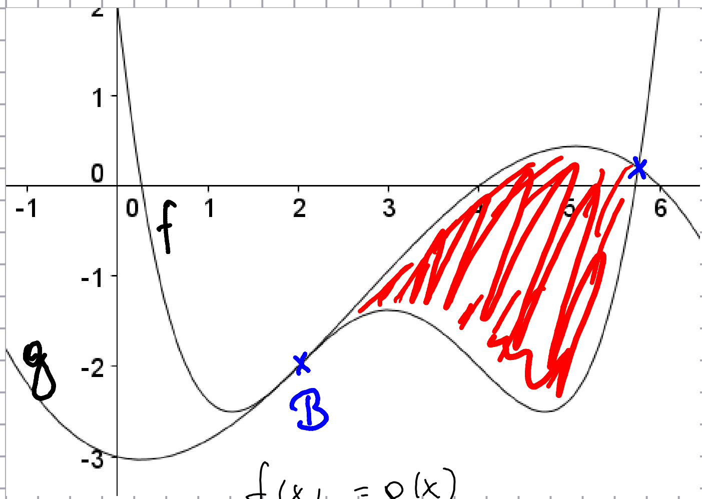
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a = -\frac{1}{16}$ $\quad b = +\frac{1}{2}$ $\quad c = -\frac{1}{4}$ $\quad d = -3$

$$g(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - 3$$

Beispiel (2)

Donnerstag, 22. April 2010
19:16



$$f(x) = g(x)$$

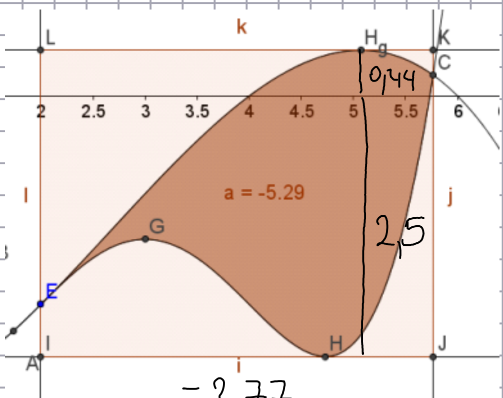
$$0{,}125x^4 - 1{,}5x^3 + 6x^2 - 9x + 2 = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - 3$$

$$\frac{1}{8}x^4 - \frac{23}{16}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 5{,}77$$

$$A = \left| \int_2^{5{,}77} f(x) - g(x) \, dx \right| = \left| \int_2^{5{,}77} \frac{1}{8}x^4 - \frac{23}{16}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + 5 \, dx \right|$$

$$= |-5{,}29| = 5{,}29 \text{ dm}^2$$



$= 3{,}77$

$$f'(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 12x - 9 = 0$$

$\Rightarrow$ MATH-SOLVER Startwert 5

$x = 4{,}73 \qquad y = f(4{,}73)$

$y = -2{,}5$

$$g'(x) = -\frac{3}{16}x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$$

TR CALC - MAXIMUM

$H(5{,}07 \mid 0{,}44)$

$A_{\square} = l \cdot b = (5{,}77 - 2) \cdot (2{,}5 + 0{,}44) = 3.77*2.94=11.0838 \text{ dm}^3$

$A_{\square} = l \cdot b = (5{,}77 - 2) \cdot (2{,}5 + 0{,}44) = 3{,}77 * 2{,}94 = 11{,}0838 \ dm^3$