Roulette:

Donnerstag, 20. Mai 2010
17:56

Binomialverteilung

Rot / Schwarz / Grün (Zahl 0)

18 Zahlen — 18 Schwarz — 1 Zahl

$p(R) = \frac{18}{37}$ $\quad p(S) = \frac{18}{37}$ $\quad p(G) = \frac{1}{37}$

o.B.d.A.: Wir setzen auf schwarz (5€)

$$\text{Gewinn}(S) = 10€ - 5€ = 5€$$

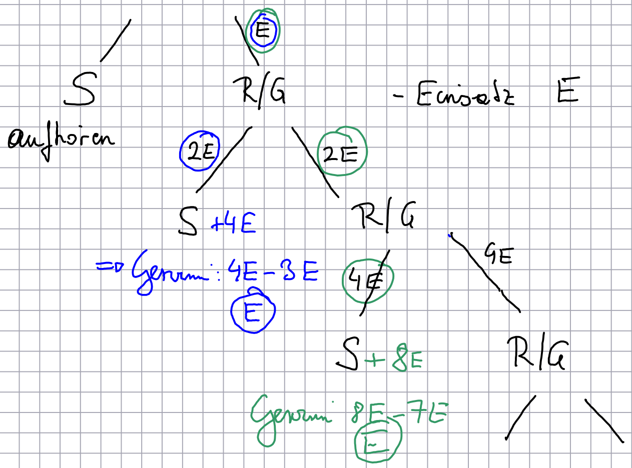
$$\left.\begin{array}{l}\text{„Gewinn"}(R) = 0€ - 5€ = -5€ \\ \text{„Gewinn"}(G) = 0€ - 5€ = -5€\end{array}\right\} \frac{19}{37}$$

$$\text{Gewinnerwartung} = 5€ \cdot \frac{18}{37} + (-5€) \cdot \frac{19}{37}$$

$$= 5€\left(\frac{18}{37} - \frac{19}{37}\right) = 5€ \cdot -\frac{1}{37}$$

$$= -\frac{5€}{37}$$

⇒ Gewinntaktik? (setze auf S)



Normalverteilung (2)

Donnerstag, 20. Mai 2010
20:34

Bsp. Lebenserwartung
Die durchschnittliche Lebenserwartung in Österreich betrug 2005 bei den Frauen 82,1 Jahre und bei den Männern 76,4 Jahre
(1971: Frauen 75,7 Jahre, Männer 73,3 Jahre)

Eingefügt aus <http://de.wikipedia.org/wiki/%C3%96sterreich#Lebenserwartung>

Lebenserwartung Männer (Jahre) Statistik

Merkmal	Wert
Anzahl erfasster Länder	221
Durchschnitt	65,62
Median	68,86
Minimum	32,10
Maximum	80,61
Standardabweichung	11,19

Eingefügt aus <http://www.atanango.com/laendervergleich-demografie-lebenserwartungmaennerjahre--top--10--22/>

Lebenserwartung Frauen (Jahre) Statistik

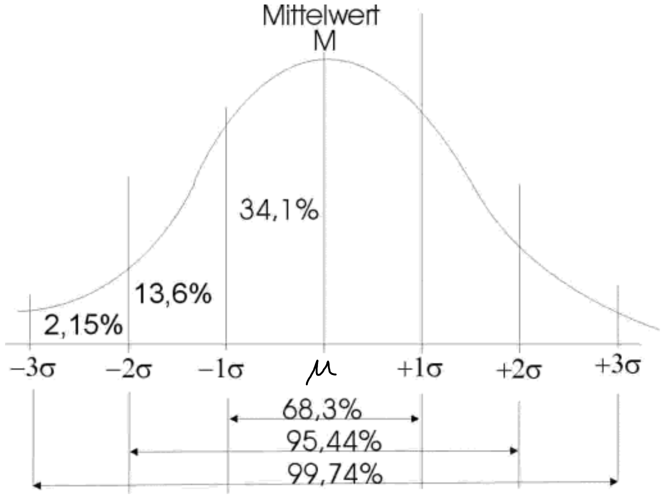
Merkmal	Wert
Anzahl erfasster Länder	221
Durchschnitt	70,52
Median	75,28
Minimum	33,17
Maximum	86,61
Standardabweichung	12,78

Eingefügt aus <http://www.atanango.com/laendervergleich/?criteria=23&sort=down&limit=10&submit=Los%21>

C.F. Gauss
(1777-1855)

Diskrete Zufallsvariablen →
(Anzahl beim Würfeln / Münzwurf / ...)
natürliche Zahl
⇒ Binomial
⇒ Hypergeometrisch

Stetige Zufallsvariablen
(kg, m, s, Jahre, ... metrische Daten)
⇒ Normalverteilung

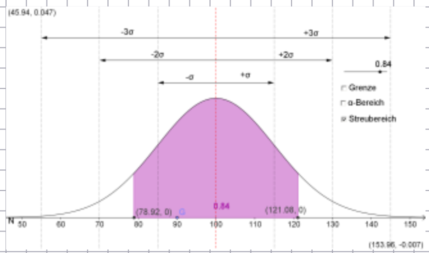

Mittelwert
M
34,1%
13,6%
2,15%
−3σ
−2σ
−1σ
μ
+1σ
+2σ
+3σ
68,3%
95,44%
99,74%

Intelligenzquotient

Dienstag, 18. Mai 2010
20:50

http://de.wikipedia.org/wiki/Intelligenzquotient

IQ-Mittelwert: 100
Standardabweichung 15



? Hochbegabung: IQ ab 130
? Höchstbegabung: IQ ab 140

Wie wahrscheinlich ist es, dass eine zufällig ausgewählte Person einen IQ von unter 90 besitzt?

$X \ldots$ IQ-Zahl $\qquad \mu = 100, \ \sigma = 15 \qquad N_{100;15}$

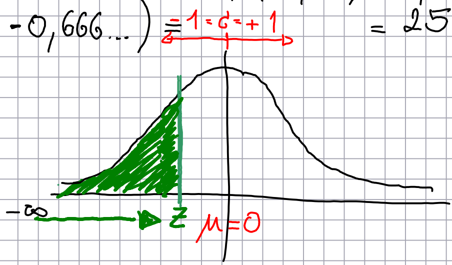
$$P(X < 90) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{90-100}{15}\right)$$

Standardisieren $\qquad N_{0;1} \qquad \mu = 0, \ \sigma = 1$

$$= P(Z < -0{,}666\ldots) \qquad \Phi(-0{,}666) = 0{,}2514 = 25{,}14\%$$

z				
0,01	0,02	$\Phi(z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0		0,5040		
0,67	25			

14486

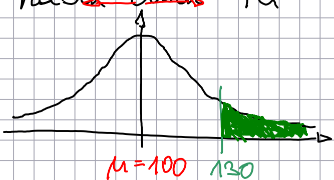


Fläche ≙ Wahrscheinlichkeit

A: Eine zufällig ausgewählte Person hat mit 25,14% Wahrscheinlichkeit einen IQ unter 90.

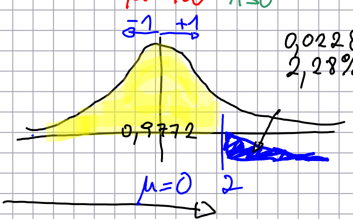
⇒ 25,14% der Personen haben einen IQ von unter 90.

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{130-100}{15}\right)$$



? IQ über 130 $= P(Z > 2)$

$$P(X > 130) = 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - \Phi(2)$$
$$= 1 - 0{,}9772$$
$$= 0{,}0228 \ \hat{=}\ 2{,}28\,\%$$



⇒ A: 2,28% der Bevölkerung haben einen

IQ von über 130.

? IQ über 140 ?

$\frac{40}{15} = \frac{8}{3}$

$P(X > 140) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{140-100}{15}\right) = P(Z > 2{,}66\ldots) =$

$= 1 - P(Z < 2{,}\dot{6}) =$

$= 1 - \phi(2{,}\dot{6})$

$= 1 - \text{normalcdf}(-5 ; \tfrac{8}{3}) = 0{,}00383\ldots =$

OG

UG (negative Zahl)

Dist^{2} $\boxed{2:}$

$\hat{=}\ 0{,}38\% \ \hat{=}\ 3{,}8‰$

Standard-Normalverteilung

Donnerstag, 20. Mai 2010
14:58

S 11/65

B.4.13. $\mu = 50\,mm$ $\sigma = 2{,}5\,mm$

X... Länge der Nägel

a) $P(X \leq 48) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{48-50}{2{,}5}\right)$

$= P(Z \leq -0{,}8)$

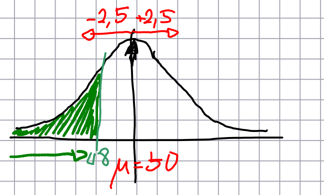
$= \Phi(-0{,}8)$

$= normalcdf(0, 48, 50, 2.5)$ ← Nicht Stand.

UG, OG, μ, σ

$= normalcdf(-10; -0{,}8)$ ← Stand.

$= 0{,}2118 \approx 21{,}2\,\%$



b) $P(X > 51) = 1 - P(X \leq 51) =$

$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{51-50}{2{,}5}\right) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}4)$

$= 1 - normalcdf(-10, 0.4)$

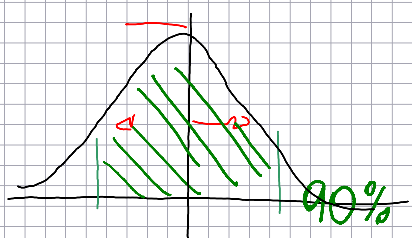
$= 0{,}3446 \approx 34{,}5\,\%$

c) $P(48 \leq X \leq 51) = P(X \leq 51) - P(X \leq 48)$

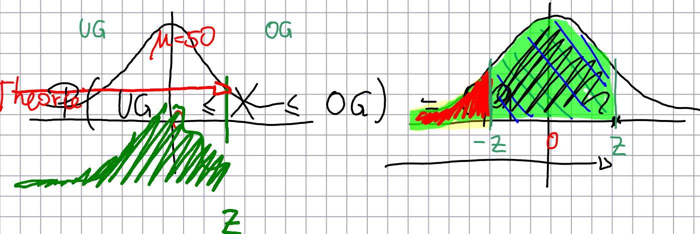
$= normalcdf(48, 51, 50, 2.5)$

$= 0{,}4435 \approx 44{,}35\,\%$

d) $90\,\% = 0{,}9$



Theorie $P(UG \leq X \leq OG)$



$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$

$\Phi(z) - \Phi(-z)$

z

$\varphi(z) + \varphi(-z) = 1$

$\phi(z) - \phi(-z)$

$\phi(z) - (1 - \phi(z))$

$\phi(z) - 1 + \phi(z)$

$$\boxed{D(z) = 2\phi(z) - 1}$$

Streubereichsformel

$P(UG \le X \le OG) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 0{,}9 = \text{Streubereich} = D(z)$

$-1{,}64 \quad 0 \quad 1{,}64$

$\Rightarrow \quad z \approx \pm 1{,}64$

$\pm z = \dfrac{X^G - \mu}{\sigma} \quad | \cdot \sigma$

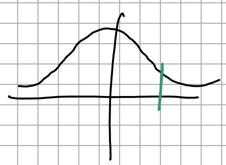
$\pm z \cdot \sigma = X - \mu \quad | + \mu$

$\mu \pm z\sigma = {}_{UG}X_{OG}$

$50 \pm 1{,}64 \cdot 2{,}5 = {}_{UG}X_{OG}$

$UG \cong 45{,}9$

$OG \cong 54{,}1$



TR: $D(z) = 2\phi(z) - 1 = 0{,}9 = 90\%$

$2\phi(z) = 1{,}9 \quad | : 2$

$\phi(z) = 0{,}95$

$z = \phi^{-1}(0{,}95)$

$z = \text{InvNorm}(0{,}95)$

$z = 1{,}64485\ldots$

$\Rightarrow$ Rückstandardisieren

$\mu \pm \sigma \cdot z = 50 \pm 1{,}6448 \cdot 2{,}5$

OG = InvNorm(0.95, 50, 2.5)

$OG = 54{,}112\ldots$ μ, σ

Bsp 4.16

eigentl. Binomial

$P(X \geq 580)$ Anzahl der Patienten, die geheilt werden $\sim B_{1000;\,0.6}$

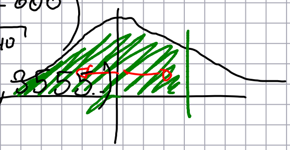
$n = 1000$ $p = 60\% = 0{,}6$ $q = 0{,}4$

$\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}6 = 600$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 15{,}49 = \sqrt{240}$

$\Rightarrow$ Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

$$P(X \geq 580) = 1 - P(X \leq 579)$$
$$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{579-600}{\sqrt{240}}\right)$$
$$= 1 - P(Z \leq -1{,}3555)$$
$$= 1 - \Phi(-1{,}3555) =$$
$$= 1 - 0{,}087709 = 0{,}91149$$
$$\approx 91\%$$



b) $P(X \leq 620) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{620-600}{\sqrt{240}}\right)$

$= P(Z \leq 1{,}29\ldots)$

$= \Phi(1{,}29) = 0{,}9015$ (Tabelle)

normalcdf$\left(-10, \frac{20}{\sqrt{240}}\right) = 0{,}90147$

$\approx 90{,}1\%$

c) $P(580 \leq X \leq 620) =$ Streubereich $= D\left(\frac{620-600}{\sqrt{240}}\right) = D(1{,}29)$

normalcdf$(580, 620, 600, \sqrt{240}) = 0{,}8029 \approx 80{,}3\%$

$D(z) = 2\Phi(z) - 1$

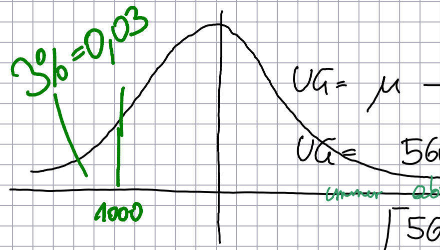
$\Phi(z) = 0{,}995$

d) $P(UG \leq X \leq OG) = 0{,}99$ invNorm$(0{,}995)$

$D(z) = 0{,}99 \Rightarrow z = 2{,}58$

$2\Phi(z) - 1 = 0{,}99$

$z = \pm 2{,}58$



$UG = \mu - \sigma \cdot z$ $\quad X$ – Abfüllmenge in mg

$UG =$ 560,01 $P(X \leq 1000)$ 639,83

immer abrunden $\quad$ immer aufrunden

[560 $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1000-\mu}{30}\right) = 0,03$

e) $\sigma = 30\,mg$ $\quad$ Sollwert $P\left(\frac{1000-\mu}{30}\right) = 0,03$

$\mu = ?$

$\mu = ?$ $\Rightarrow$ $\cancel{\Phi(z) =}\ 0,03$

$\Phi\left(\frac{1000-\mu}{30}\right) = 0,03$

InvNorm(0,03) $\quad \Rightarrow z = \frac{1000-\mu}{30} = -1,88$

$1000 - \mu = -1,88 \cdot 30$

$1000 + 1,88 \cdot 30 = \mu$

$1056,4 = \mu$

A: Ich muss die Füllmaschine auf 1056,4 mg einstellen, damit höchstens 3% der Packungen unter 1000 mg wiegen.

Karpfen-Aufgabe

In einem Ort gibt es einige Karpfenteiche. Das Gewicht der Karpfen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 4$ kg und der Standardabweichung $\sigma = 1{,}25$ kg.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Karpfen zu fangen,

1) der höchstens 2,5 kg
2) mindestens 5 kg wiegt?

b) Wieviel Prozent aller Karpfen wiegen zwischen 3 kg und 4,5 kg?

c) In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Gewichtsbereich liegen 80 % aller Karpfen?

d) Der Fischereiverband will einen Preis für die schwersten Karpfen aussetzen. Welches Mindestgewicht muss man verlangen, damit die Wahrscheinlichkeit, den Preis zu bekommen, 2 % beträgt?

e) In einem kleinen Teich befinden sich 10 Karpfen und 15 Barsche. Ein Angler beschließt, 3 Fische zu fangen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 2 Karpfen fängt? (Die gefangenen Fische werden nicht zurückgeworfen.)

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Ein Medikament hat eine Heilungswahrscheinlichkeit von 80 %.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 400 mit diesem Medikament behandelte Patienten

1) Höchstens 310 Patienten
2) zwischen (einschließlich) 308 und 332 Patienten geheilt werden?

b) In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Bereich liegt mit 80 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Geheilten?