Vorbereitungskurs
Lehrlinge

Freitag, 21. Mai 2010
14:00

BRP Mathematik
Mag. Kurt Söser
2009/10

WH: Zinsrechnung

K ..... Kapital

Z ... Zinsen

p ... Zinssatz

$$K_n = K_0 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{r}{}^{n}$$

r ... Aufzinsungsf.

KeSt. 25%

$p_{eff} = p \cdot 0{,}75$

v ... Abzinsungsf.

Bsp. Bausparer vorschüssig

a)

0 J. — 1 J. — 2 J. — 3 J. — 4 J. — 6 J.

R R R R R

Barwert — Endwert

R = 1200 €

p = 4%

n = 6 Jahre

$$_vE_6 = R \cdot r^6 + R \cdot r^5 + \ldots + R \cdot r$$

$$= R \cdot (\underbrace{r^6 + r^5 + \ldots + r}) $$

$$= R \cdot r\,(r^5 + r^4 + \ldots + 1)$$

$$= R \cdot r \cdot \frac{r^6 - 1}{r - 1}$$

geom. Reihe

$$s_n = b_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$r = 1 + 1 = 1{,}04$

$$E = 1200 \cdot 1{,}04 \cdot \frac{(1{,}04^6 - 1)}{(1{,}04 - 1)} = 8277{,}95\ €$$

b) Endwert = 6000 €

monatliche Einzahlungen (vorsch.) = ?

$r_{12} = \sqrt[12]{r} = 1{,}0032737 \Rightarrow \boxed{R}$ 6 Jahre = 72 M.

$$_vE = R \cdot r_{12} \cdot \frac{r_{12}^{72} - 1}{r_{12} - 1}$$

" 81,31

$$\frac{E}{r_{12} \cdot \frac{r_{12}^{72} - 1}{r_{12} - 1}} = R = 73{,}79\ €$$

c) aus b) 6000 € Guthaben

monatliche Auszahlung 100€ (Monatsbeginn)

0 — 1 M — 2 M

R R R

Wie lange komme ich damit aus? n?

$$_{v}B = R + R \cdot v + R \cdot v^2 + R \cdot v^3 + \ldots$$

$$= \ldots$$

$$_{v}B_n = R \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1} = R \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$v_{12} = \sqrt[12]{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r_{12}} \qquad v = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{V}$$

$$B = R \cdot \frac{v_{12}^n - 1}{v_{12} - 1} \quad \Big| :R$$

$$\frac{B}{R} = \frac{v_{12}^n - 1}{v_{12} - 1} \quad \Big| \cdot (v_{12} - 1)$$

$$\frac{B \cdot (v_{12} - 1)}{R} = v_{12}^n - 1 \quad \Big| +1$$

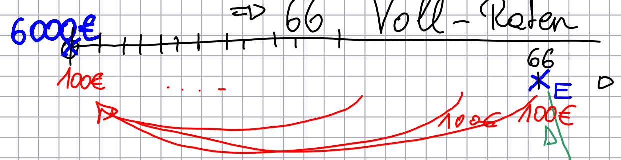
$$\ln\left[\frac{B \cdot (v_{12} - 1)}{R} + 1\right] = n \ln v_{12}$$

$$\frac{\ln\left[\frac{B \cdot (v_{12} - 1)}{R} + 1\right]}{\ln v_{12}} = n$$

$$66{,}664\ldots = n$$

$$[0{,}664 \cdot 100\,€]$$

$$\Rightarrow 66 \text{ Voll-Raten}$$



mit der letzten
Voll-Rate
Rentenrest ?

$$_{v}B_{66n} = 100 \cdot v_{12} \cdot \frac{v_{12}^{66} - 1}{v_{12} - 1}$$

$$_{v}B_{66n} = 5926{,}98\,€$$

$$RR_0 = 6000 - 5926{,}98 = 73{,}02\,€$$

Für eine Eigentumswohnung bietet Interessent A 70.000 € sofort und 50.000 € in 3 Jahren und 4 Monaten. Interessentin B 110.000 € in 3 Jahren und 20.000 € nach weiteren 2 Jahren 9 Monaten.

(a) Um welchen Betrag unterscheiden sich die beiden Angebote heute bei Annahme eines konstanten Zinsfußes von 9%?

Jemand benötigt für Anschaffungen eine Privatkleinkredit in der Höhe von 75000 €, den er in fünf Jahren zurückzahlen möchte. Er holt folgende drei Angebote ein:
Bank A: 1,2 % Bearbeitungsgebühr, Verzinsung 8,75% p.a.
Bank B: jährliche Kontoführungsgebühr von 25 € nachschüssig, Verzinsung 9 % p.a.

Für eine Eigentumswohnung bietet Interessent A 70.000 € sofort und 50.000 € in 3 Jahren und 4 Monaten. Interessentin B 110.000 € in 3 Jahren und 20.000 € nach weiteren 2 Jahren 9 Monaten.

(a) Um welchen Betrag unterscheiden sich die beiden Angebote heute bei Annahme eines konstanten Zinsfußes von 9%?

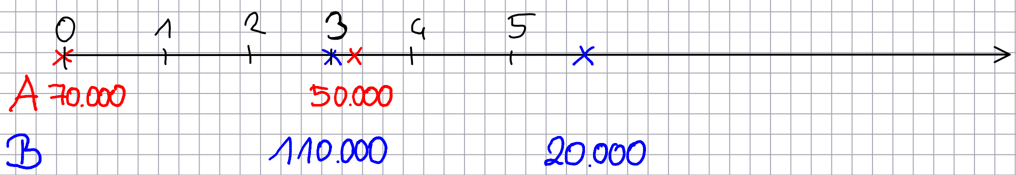
Jemand benötigt für Anschaffungen eine Privatkleinkredit in der Höhe von 75000 €, den er in fünf Jahren zurückzahlen möchte. Er holt folgende drei Angebote ein:

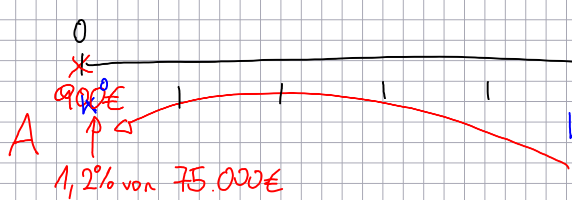
Bank A: 1,2 % Bearbeitungsgebühr, Verzinsung 8,75% p.a.

Bank B: jährliche Kontoführungsgebühr von 25 € nachschüssig, Verzinsung 9 % p.a.

BANK C: jährliche nachschüssige Raten von 1920 €, keine weiteren Spesen.

Für welche Bank wird er sich entscheiden?





$K_5 = 75.000 \cdot 1{,}0875^5$

$= 114.079{,}50€$

$\Rightarrow Z_5 = 39.079{,}50€$

$Z_0 = Z_5 \cdot v^5 = 25692{,}28\,€$

$A = 900€ + 25692{,}28€ = 26592{,}28€$

B: jährliche Kontoführung 25€ $p = 9\%$

$\Rightarrow Z_5 = 40.396{,}80$

$K_5 = 75.000 \cdot 1{,}09^5 = 115.396{,}80€$

$Z_0 = Z_5 \cdot v^5 = 26255{,}15€$

$B = 25 \cdot v \cdot \frac{v^5 - 1}{v - 1} = 97{,}25€$ $r = 1{,}09$

$B: 97{,}25 + 26255{,}15€$

$26352{,}4€$

Bsp.
Die Halbwertzeit von Radium 226 beträgt ungefähr 1620 Jahre. Nach wie vielen Jahren sind 80% einer Ausgangsmenge dieses Elements zerfallen?

Aufgabe 10.1.5: Das schmerzstillende Mittel Acetylsalicylsäure (Aspirin, Aspro,...) wird im Körper exponentiell abgebaut, seine wirksame Menge im Körper eines nierengesunden Menschen halbiert sich alle 3 Stunden.
a) Stelle die Funktionsgleichung auf, die den Abbau einer Tablette mit $m0 = 500$ mg beschreibt!
b) Berechne die Anzahl der Stunden, bis von einer solchen Tablette nur noch 10mg im Körper sind!

10.1 Wachstums- und Zerfallsprozesse

Aufgabe 10.1.1: Ein Anfangskapital in Höhe von K0 = 3000 € wird mit einem Jahreszinssatz von 4,5 % verzinst.
a) Stelle die Funktionsgleichung auf, die das Anwachsen dieses Kapitals beschreibt.
b) Auf welchen Wert wächst das Kapital in 12 Jahren?
c) Ein Anfangskapital, dessen Höhe hier nicht bekannt ist, soll bei einem gleich bleibenden Zinssatz p angelegt und nach 13 Jahren eine Verdopplung des Anfangswertes erreichen. Wie hoch muss dann der jährliche Zinssatz sein?

Aufgabe 10.1.2: Das kleine Fürstentum Binaco hatte 1985 gerade 870 000 Einwohner. Im Jahr 2005 waren es dann schon 1 Million Einwohner.
a) Gib die Funktionsgleichung an, mit der das Bevölkerungswachstum beschrieben werden kann, wenn die jährliche prozentuale Zunahme stets gleich groß bleibt.
b) In welchem Zeitabschnitt verdoppelt sich die Einwohnerzahl?
c) Das noch kleinere Fürstentum Minaco hatte 1985 gerade 426 800 Einwohner.
Die gleich bleibende jährliche Wachstumsrate beträgt hier aber 15 %.
In welchem Jahr werden die beiden Fürstentümer gleich viele Einwohner haben?

Aufgabe 10.1.3: In einer Bakterienkultur sind zu Beginn einer Beobachtung 6000 Bakterien vorhanden. Dabei ist bekannt, dass sich bei diesen Bakterien die Anzahl in 5 Stunden verdreifacht.
a) Begründe, dass dieses Wachstum durch die Funktionsgleichung:
N (t) =6000 ·1,24573t
beschrieben werden kann.
b) Berechne die Anzahl der Bakterien 3 Stunden nach Beobachtungsbeginn.
c) Nach welcher Zeit (in Stunden) hat sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht?

Aufgabe 10.1.4: Radioaktive Stoffe zerfallen nach dem Gesetz m(t) = m0 · k t
a) Für radioaktives Jod gilt k = 0,917. (Zeitmaßstab: 1 Tag)
Wie viel mg sind von 3 g dieses Jodisotops nach 45 Tagen noch vorhanden?
Bestimme die Halbwertszeit von radioaktivem Jod.
b) Das Element Radon zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,8 Tagen.
Bestimme mit m0 = 50 mg die Funktionsgleichung, die den Zerfall beschreibt.
Nach welcher Zeit sind noch 10% der Anfangsmenge vorhanden?
c) Von radioaktivem Radium sind nach 100 Jahren noch ca. 95,8 % vorhanden.
Stelle die Funktionsgleichung auf, die den jährlichen Zerfall beschreibt.
Berechne die Halbwertszeit von Radium!

1. Eine Bakterienkultur wird von einer Krankheit befallen, ihre Population nimmt daher stark ab: 10 Tage nach Beginn des Beobachtungszeitraums hat sie bereits um 40 % abgenommen, nach weiteren 8 Tagen umfasst sie nur mehr 40 000 Bakterien. Berechne die Anfangspopulation! Stelle die Entwicklung der Population N(t) durch eine Exponentialfunktion (und durch eine Differentialgleichung) dar! Um wie viel Prozent nimmt die Population täglich ab? Um wie viel Prozent nimmt sie in 5 Tagen ab? In welchem Zeitraum nimmt sie um die Hälfte ab? Nach wie viel Tagen ist die Population unter ein Bakterium gesunken, also praktisch ausgestorben?
2. U131 ist ein β-Strahler mit einer Halbwertszeit von 6 Tagen. Gib das Zerfallsgesetz auf zwei Arten an! Wenn von einer Probe nach 16 Tagen noch 50 mg vorhanden sind, wie viel mg waren es dann am Anfang? Nach wie viel Tagen ist nur mehr 1 mg vorhanden? Berechne die prozentuelle Änderung vom Ende des 5. bis zum Ende des 10. Tages! Leite aus dem Zerfallsgesetz eine Differentialgleichung her, die diesen Zerfall beschreibt! Beschreibe, was diese Differentialgleichung inhaltlich aussagt!
3. Wenn Licht in einen durchsichtigen Stoff eintritt, wird ein Teil des Lichts beim Durchlaufen des Stoffes absorbiert Die Abnahme der Lichtintensität I(d) beim Durchgang durch eine Schicht der Dicke d erfolgt exponentiell. Licht wird beim Durchdringen einer Schicht von 10 mm Dicke auf 80 % des ursprünglichen Wertes geschwächt. Berechne, um wie viel Prozent das Licht pro mm geschwächt wird! Bei welcher Schichtdicke ist eine Abschwächung um 70 % zu erwarten?
Wie viel Prozent werden von einer 100 mm dicken Schicht absorbiert?
Welche Beziehung besteht zwischen der Intensität bei der Schichtdicke d und der Änderungsrate der Intensität bei derselben Schichtdicke? Stelle diese Beziehung durch eine Formel dar!
4. Die Bevölkerung Oberösterreichs ist von 1 289 000 im Jahr 1986 auf 1 315 000 im Jahr 2000 angewachsen. Beschreibe die Bevölkerungsentwicklung a) mit Hilfe eines linearen Modells; b)mit Hilfe eines exponentiellen Modells. Untersuche jeweils, wann nach diesen beiden Modellen Oberösterreich menschenleer gewesen wäre! Stelle in einer Zeichnung die Bevölkerungsentwicklung nach beiden Modellen vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2500 dar und vergleiche! Ermittle aus der Zeichnung, ab wann die nach den beiden Modellen prognostizierten Bevölkerungszahlen um mehr als 200 000 differieren!
5. In einem Gefäß befindet sich heißes Wasser mit der Temperatur T2 = 80°C. Die Umgebung hat die Temperatur T1 = 20°C. Die Abkühlung auf die Temperatur T erfolgt nach dem Gesetz
$T = T_1(T_2 - T_1).e^{-0{,}05t}$
(T in Celsiusgraden und t in Minuten) Welche Temperatur hat das Wasser nach a) 10 min, b) 40min?
6. Frau Süss erhält eine Tasse mit besonders heißem Tee (90°C) serviert. Da sie ihn gezuckert liebt, möchte sie zwei Stück Zucker hineinwerfen. Dadurch wird der Tee, vor allem durch den Lösungsvorgang um etwa 15 °C abgekühlt. Frau Süss liebt eine Trinktemperatur von etwa 35°C. Ist es nun klüger, den Zucker sofort hineinzuwerfen oder abzuwarten, bis der Tee auf eine Temperatur von 50°C abgekühlt ist und dann erst zu zuckern? Verwende die Formel und die Umgebungstemperatur vom Beispiel 5.

Eingefügt aus <http://matheaufgaben.wordpress.com/2007/12/29/wachstum-und-zerfallsprozesse/>

Gegeben ist eine in den Jahren 2005 bis 2018 nachschüssig zahlbare Rente mit der Jahresrate € 24.000,- und i = 7% p.a.. $\Rightarrow r = 1{,}07$

a) Berechne Bar- und Endwert der Rente!

b) Mit welcher einmaligen Zahlung könnte die gesamte Rente am 1. Jänner 2010 äquivalent ersetzt werden?

c) Die Rente soll äquivalent umgewandelt werden in eine zehnmalige Rente, deren erste Jahresrate am 1.1.2007 fällig ist. Wie hoch ist die Jahresrate?

d) Die Rente soll äquivalent ersetzt werden durch eine Rente mit der Jahresrate 36.000 €,-, deren erste Rate am 1.1.2008 fällig ist. Wie oft kann die volle Rate bezogen werden? Wie hoch ist die Restrate, wenn diese mit der letzten Vollrate behoben wird?

e) Bei welchem Jahreszins hat die Rente am 1.1.2020 den Wert von 1 Mio. €?

[a) 209.891,28 € 541.210,29 € b) 294.383,01 € c) 31.975,65 € d) 9 volle Raten, 10.581,71 Restrate e) i = 0,10969]

Gegeben ist eine in den Jahren 2005 bis 2018 nachschüssig zahlbare Rente mit der Jahresrate € 24.000,- und i = 7% p.a..

a) Berechne Bar- und Endwert der Rente!

2005 2018 +13J.

$$B = R \cdot v \cdot \frac{v^{13} - 1}{v - 1}$$

$v = \frac{1}{r} =$

$$_nB = 24.000 \cdot v \cdot \frac{v^{13} - 1}{v - 1} = 200.583,\ €$$

$\cdot v^{13}$ $\cdot r^{13}$

$$E = R \cdot \frac{r^{13} - 1}{r - 1} = 482.375,43\ €$$

b) Mit welcher einmaligen Zahlung könnte die gesamte Rente am 1. Jänner 2010 äquivalent ersetzt werden?

2005 2010

B_0 B_5

$$B_5 = B_0 \cdot r^5 = E \cdot v^8$$

c) Die Rente soll äquivalent umgewandelt werden in eine zehnmalige Rente, deren erste Jahresrate am 1.1.2007 fällig ist. Wie hoch ist die Jahresrate?

$B_5 = 281.328,90\,€$

$r = 1{,}07$

vorschüssig

B_0 2006 2007

R R R R R

$R = ?$

B_2

$$B_2 = B_0 \cdot r^2 = 229.648,19\ €$$

$B_2 = R \cdot \frac{v^{10} - 1}{v - 1}$ $\Rightarrow R = B_2 : \frac{v^{10} - 1}{v - 1}$

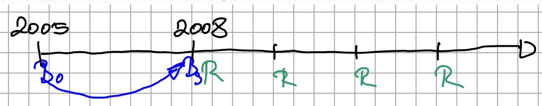
$R = 30.567,70\,€$

d) Die Rente soll äquivalent ersetzt werden durch eine Rente mit der Jahresrate 36.000 €,-, deren erste Rate am 1.1.2008 fällig ist. Wie oft kann die volle Rate bezogen werden? Wie hoch ist die Restrate, wenn diese mit der letzten Vollrate behoben wird?

d) Die Rente soll äquivalent ersetzt werden durch eine Rente mit der Jahresrate 36.000 €,-, deren erste Rate am 1.1.2008 fällig ist. Wie oft kann die volle Rate bezogen werden? Wie hoch ist die Restrate, wenn diese mit der letzten Vollrate behoben wird?

$B_2 = R \cdot \frac{v^{n}-1}{v-1} \Rightarrow R = \frac{B_2 \cdot (v-1)}{v^{10}-1}$

$R = 30.567,70€$



$R = 36.000$ vorschüssig

$B_3 = B_0 \cdot r^3 = 245723,56€$

$v B_3 = R \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1}$ $\quad / :R$

$\frac{B_3}{R} = \frac{v^n - 1}{v-1} \quad / \cdot (v-1)$

$\frac{B_3 \cdot (v-1)}{R} = v^n - 1 \quad / +1$

$\ln \left[\frac{B_3 \cdot (v-1)}{R} + 1 \right] = n \cdot \ln v$

$\longrightarrow n \quad 8,74 \quad$ 8 Vollraten

$\overline{B} = 36000 \cdot \frac{v^8 - 1}{v - 1}$

$= 230.014,42 €$

vgl. 245.723, €

$\Rightarrow$ Differenz $15709,14€ = RR_0$

$RR_8 = RR_0 \cdot r^8 = 26991,23€$

A: Die Rate kann 8 Mal voll bezogen und die Restrate beträgt 26991,23€

e) Bei welchem Jahreszins hat die Rente am 1.1.2020 den Wert von 1 Mio €?

$B_{15} = B_0 \cdot r^{15} = 1000.000$

$r^{15} = \frac{1.000.000}{B_0}$

$1 + \frac{p}{100} \quad r = \sqrt[15]{\frac{1.000.000}{200.583,62}} = 1,11304\ldots$

$\Rightarrow p = 11,3\%$

Aufgabe 10.1.5: Das schmerzstillende Mittel Acetylsalicylsäure (Aspirin, Aspro,...) wird im Körper exponentiell abgebaut, seine wirksame Menge im Körper eines nierengesunden Menschen halbiert sich alle 3 Stunden.
a) Stelle die Funktionsgleichung auf, die den Abbau einer Tablette mit m0 = 500 mg beschreibt!
b) Berechne die Anzahl der Stunden, bis von einer solchen Tablette nur noch 10mg im Körper sind!

$\lambda = + \ldots$ Wachst.

$\lambda = - \ldots$ Zerfall

$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

$a > 1$ $\quad = N_0 \cdot a^t$ Wachstum

$m(t) = m_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} = m_0 \cdot a^t$

Menge nach Zeit t

$0 < a < 1$ Zerfall

Halbwertszeit $\tau = 3h$

$m(3) = \frac{1}{2} \cdot m_0$

$m(3) = m_0 \cdot e^{\lambda \cdot 3}$

$\frac{1}{2} \cancel{m_0} = \cancel{m_0} \cdot e^{\lambda \cdot 3}$

$\frac{1}{2} = e^{3\lambda} \quad / \ln$

$\cancel{\ln 1} - \ln 2 = \ln \frac{1}{2} = \lambda \cdot \underbrace{\ln e}_{1} \quad / :3$

0

$\frac{\ln \frac{1}{2}}{3} = \lambda$

$-\frac{\ln 2}{3} = \lambda$

$-0{,}231 = \lambda$

Allg

$-\frac{\ln 2}{\tau} = \lambda$

$$\boxed{m(t) = 500 \cdot e^{-0{,}231\ldots \cdot t}}$$

b) $m(t_0) = 10mg \qquad t_0 = ?$

$10 = 500 \cdot e^{-0{,}231\ldots \cdot t_0} \quad / 500$

$\ln \quad 0{,}02 = \ln e^{-0{,}231\ldots t_0}$

$\ln 0{,}02 = -0{,}231\ldots \cdot t_0 \quad / : -0{,}231$

$\frac{\ln 0{,}02}{-0{,}231} = t = 16{,}931\ldots h$

Bsp $N(t) = \frac{N_0 \cdot G}{N_0 + (G - N_0) \cdot e^{-\lambda t}}$

Kontinuierlich log. Wachstum

$G = 1000$ Computer

$N_0 = 1$ infizierter PC

Nach 4 Tagen sind bereits 25 PC mit dem Virus infiziert.

a) Wie lange dauert es, bis die Hälfte aller PCs infiziert sind?

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 999 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$$

$$N(4) = 25 = \frac{1000}{1 + 999 \cdot e^{-\lambda \cdot 4}} \quad \Big/ \cdot \left(1 + 999 \cdot e^{-\lambda \cdot 4}\right)$$

$$\overset{1}{\cancel{25}} \cdot \left(1 + 999 \cdot e^{-\lambda \cdot 4}\right) = \overset{40}{\cancel{1000}} \quad /-1 \quad /:999$$

$$\underbrace{\ln e^{-\lambda \cdot 4}}_{1} = \ln \frac{39}{999}$$

$$-\lambda \cdot 4 = \ln \frac{39}{999} \quad /:(-4)$$

$$\lambda = 0{,}8107\ldots \quad \boxed{L}$$

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 999 \cdot e^{-0{,}8107 \cdot t}}$$

$$N(t_0) = \cancel{500}\,1 = \frac{\cancel{1000}\,2}{1 + 999 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$$

$$1 + 999 \cdot e^{-\lambda \cdot t_0} = 2$$

$$999 \cdot e^{-\lambda \cdot t_0} = 1$$

$$\underbrace{\ln e}_{1}^{-\lambda t_0} = \ln \frac{1}{999}$$

$$t_0 = \frac{\ln \frac{1}{999}}{-\lambda}$$

$$t_0 = 8{,}52 \text{ Tage}$$