VEKTOREN – ÜBUNGEN

1. Man ermittle die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes und den Umfang des Parallelogramms: A(1/-3), B(5/1), C(1/3). (***E***: D(-3/-1); 20,26)

2. Bilden Sie die Summe und Differenz grafisch und rechnerisch: $\vec{a}$ = (2/3), $\vec{b}$ = (-3/2). (***E***: (-1/5); (5/-1))

3. Überprüfen Sie grafisch und rechnerisch, ob das Viereck A(0/1), B(1/-2), C(5/1), D(3/3) ein Trapez ist. (***E***: AD // BC)

4. Überprüfen Sie, ob die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ zueinander parallel sind: A(4/2), B(-2/1), C(0/5), D(2/-2). (***E***: Nein)

5. Ermitteln Sie den zu $\vec{a}$ =(-7/$\frac{12}{5}$) entgegengesetzt orientierten Einheitsvektor. (***E***: $\left(\frac{35}{37}/-\frac{12}{37}\right)$)

6. Von einem Quadrat kennt man die Eckpunkte A(-1/0) und B(4/-2). Ermitteln Sie C und D. (***E***: C(6/3); D(1/5))

7. Ergänzen Sie die fehlende Koordinate so, dass die Vektoren aufeinander normal stehen: $\vec{a}$ = (2/3), $\vec{b}$ = (-6/…). (***E***: 4)

8. Von einem Quadrat kennt man den Eckpunkt A(-2/0) und den Mittelpunkt M(2/2). Berechnen Sie die fehlenden Eckpunkte. (***E***: B(4/-2); C(6/4); D(0/6))

9. Berechnen Sie den Winkel, den die Vektoren $\vec{a}$ = (2/3) und $\vec{b}$ = (-1/2) miteinander einschließen. (***E***: 60,26°)

10. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks: A(-5/-30), B(28/26), C(-20/-10). (***E***: 750)

11. Ermitteln Sie die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes des Parallelogramms ABCD (A(-9/-5), B(15/2), C(30/22, D). Berechnen Sie den Flächeninhalt. Liegt ein besonderes Parallelogramm (Rechteck, Quadrat, Raute) vor? (***E***: D(6/15); 375; Raute)

12. A(-2/-4); B(4/4); C(3/19); D(-9/3).
    Prüfen Sie nach, dass die Punkte ABCD ein Trapez bilden.
    Berechnen Sie alle Winkel, den Umfang, den Flächeninhalt und die Höhe!
    (***E***: AB // CD; 81,87°; 139,32°; 40,68°; 98,13°; 54,93; 147; 9,8)

ÜBUNGSBEISPIELE – BRP-M-PRÜFUNG

1.a) Berechnen Sie mittels Differenzenquotient von der Funktion $f: y = -3x^2 + 2x + 5$ die Steigung der Tangente an der Stelle -1.

b) Skizzieren Sie mittels Berechnung der Nullstellen und einer Wertetabelle den Verlauf der Kurve $g: y^2 = 4x^2 + x^3$ im Bereich $[-4;0]$.
An welchen Stellen hat die Kurve den Steigungswinkel 45°?
In welchem Kurvenpunkt beträgt die Krümmung -2?

2) Jemand schließt einen Bausparvertrag in der Höhe von 10 000 € ab. Im Quartal will er 12‰ der Vertragssumme nachschüssig zu 5% p.a. ansparen. Dazu bekommt er 7% staatliche Prämie.

a) Welchen Endbetrag bekommt er nach 6 Jahren Laufzeit ausbezahlt?
b) Ab Beginn des 4. Jahres will er die Sparrate um 30% erhöhen. Auf welchen Endbetrag kommt er nun nach 6 Jahren?
c) Am Ende des 5. Jahres möchte er einen Ankauf tätigen. Wie viel hat er (unter Berücksichtigung von Aufgabe b)) bis dahin gespart?
d) Er erhält nun den angesparten Betrag (Aufgabe c)), den Rest auf 10 000 € bekommt er als Kredit, den er in nachschüssigen Quartalsraten zu 7% p.a. zurückzahlt. Die Ratenhöhe beträgt in den ersten 10 Jahren 9‰, in den restlichen Jahren 9% der Vertragssumme. Wie lange dauert dann noch die Rückzahlung?

3.a) Aus Erfahrung weiß man, dass 4% aller Fluggäste, die Plätze reservieren lassen, nicht zum Flug erscheinen. Eine Fluggesellschaft verkauft deshalb 123 Karten für 120 verfügbare Plätze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese in der Praxis übliche Überbuchung gut geht?

b) Von 1000 Fluggästen sind 30% Amerikaner. In einer Studie wurde festgestellt, dass 13% der Amerikaner aber nur 2% der Nichtamerikaner zum Essen Tomatensaft trinken. Ein Passagier bestellt zum Essen Tomatensaft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Amerikaner ist?

c) In einem Flugzeug befinden sich 65 Personen, darunter 9 Österreicher, 12 Franzosen und 7 Spanier. Bei der Zollkontrolle werden zufällig 6 Personen ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass (1) aus jedem der drei Länder genau 2 Personen, (2) mindestens 2 Franzosen zu erwischen?

4) In der modernen Kommunikationstechnik (Internet!) werden die Kupferkabel durch Glasfaserkabeln ersetzt. Längs der Glasfaser wird das Licht gemäß der folgenden Gleichung geschwächt:

$P = P_0 \cdot 10^{-\frac{a \cdot x}{10}}$ P ... Leistung, a ... Materialkonstante, x ... Länge in km

a) Eine 8km lange Faser mit einer Dämpfung a = 2,5 wird mit einem Lichtimpuls der Leistung 50 mW beschickt. Welche Leistung hat das Signal am anderen Ende der Faser?
b) Wie groß darf die Dämpfung a höchstens sein, damit nach 5km noch mindestens 10% der Ausgangsleistung vorhanden sind?

Ergebnisse:
1.a) $f'(-1) = 8$ b) $x_1 = 3{,}2$ $x_2 = -1{,}6$ P(-3,1/+2,9)
2.a) 3558,30 b) 4053,05 c) 3212,36 d) 2,5 J.
3.a) 87,37% b) 73,58% c) 30,52%
4.a) 0,5 mW b) a = 2

Diskussion von ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen)

1.a) $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{15}{4}$ [N_1(-5/0), N_2(3/0), T(-1/-4)]

b) $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{4}$ [N_1(1/0), N_2(9/0), H(5/4)]

2.a) $y=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x+2$ [N_1(-4/0), $N_{2,3}$(2/0), H(-2/4), T(2/0), W(0/2), $t_W: y=-\frac{3}{2}x+2$]

b) $y=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{4}x+5$ [N(4/0), W(2/2,5), $y=-\frac{1}{4}x+3$]

3.a) $y=\frac{1}{8}\left(x^3-12x^2+36x+8\right)$ [N(-0,2/0), H(2/5), T(6/1), W(4/3), $t_W: y=-\frac{3}{2}x+9$]

b) $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+7x-5$ [N(1,23/0), W(2/1), $t_W: y=x-1$]

Übungen zur Differentialrechnung

1) Ermittle den Differenzenquotienten und daraus den Differentialquotienten der gegebenen Funktion! Bestimme weiters die Tangentengleichung an der angegebenen Stelle!

a) $y=\frac{1}{4}x^2 \quad x_0=2$ b) $y=x^3-1 \quad x_0=-1$ c) $y=x^2-3x \quad x_0=1$

d) $y=(2x+1)^2 \quad x_0=-2$ e) $y=\frac{3}{x} \quad x_0=1{,}5$

2) Der Graph der Funktion y = f(x) hat seinen Wendepunkt auf der x-Achse. Weiters kennt man $f'(x)=x-\frac{x^2}{6}$.

a) Berechnen Sie y = f(x)!
b) Diskutieren Sie y = f(x)!
c) Bestimmen Sie jenen Kurvenpunkt, in dem die Krümmung den Wert -2 hat. Interpretieren Sie den Begriff „negative Krümmung"!
d) Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von der x-Achse und y = f(x) begrenzt wird!

3) Ein allseitig geschlossener Zementsilo hat die Form eines Zylinders mit einem aufgesetzten Kegel, dessen Öffnungswinkel 90° beträgt. Wie müssen der Radius r des Basiskreises und die Höhe h des Zylinders gewählt werden, wenn der Silo mit einem Fassungsvermögen von 17 m³ eine möglichst kleine Oberfläche besitzen soll?

4) Gasflaschen (V = 5 Liter) haben die Gestalt eines Drehzylinders mit aufgesetzter Halbkugel (Radien sind gleich!). Berechnen Sie den minimalen Materialverbrauch!

5) Ein rotationssymmetrisches Werkstück hat die Form eines Zylinders mit auf der einen Seite aufgesetzter Halbkugel und auf der anderen Seite aufgesetztem Drehkegel (Radien sind gleich!). Das Volumen des Körpers beträgt 333π. Die Höhe h_1 des Kegels verhält sich zu seinem Radius wie 15 : 8. Wie ist das Werkstück zu dimensionieren, damit die Oberfläche minimal wird?

Ergebnisse:

1.a) $y = x - 1$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = -x - 1$ d) $y = -12x - 15$ e) $y = -\frac{4}{3}x + 4$

2.a) W (3/0); $y=-\frac{x^3}{18}+\frac{x^2}{2}-3$ b) N: 3 / -2,2 / 8,2; T (0/-3) H (6/3); t_W: $y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$
c) P (9/-3) d) 20,25

3) r = 1,46 h = 2,06

4) r = 0,98 O = 15,23

5) r = 6 h_1 = 11,25 h = 1,5 O = 523,075