aufgaben ...

Übungsaufgaben vom 27. Mai 2010

1. Für Fußballer A beträgt die Wahrscheinlichkeit, ein Tor zu erzielen, 60 %. Er schießt 10-mal hintereinander auf ein Tor. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er
   a) mindestens 3-mal trifft
   b) Genau einmal trifft
   c) mindestens einmal trifft
   d) höchstens einmal trifft
   e) mindestens 4-mal, aber höchstens 7-mal trifft.

   f) Wie oft müsste er auf das Tor schießen, um mit mehr als 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Treffer zu erzielen?

2. Bei einem Buchstabenlegespiel erhält ein Spieler 16 gleichartige Plättchen, von denen 5 den Buchstaben A, 5 den Buchstaben E, 3 den Buchstaben S und 3 den Buchstaben T tragen.
   a) Der Spieler zieht nacheinander 3 Plättchen, und legt sie von links nach rechts auf den Tisch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Buchstaben die Wörter AST bzw. TAT ergeben!
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei gleich Buchstaben zu bekommen, wenn der Spieler gleichzeitig drei Plättchen zieht?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei gezogenen Plättchen mindestens zwei A dabei sind?
   d) Ohne Wissen des Spielers wird ein zusätzliches Plättchen mit dem Buchstaben C zu seinen Plättchen gemischt. Wie oft muss der Spieler mindestens (mit Zurücklegen) ziehen, damit er die Manipulation mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% bemerkt, d.h. Das Plättchen mit dem Buchstaben C zieht?

3. Die Glühbirnenproduktion eines bestimmten Unternehmens enthält erfahrungsgemäß 8% „Montagsbirnen“, d.h. Glühbirnen mit deutlich kürzerer Lebensdauer.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 10 zufällig ausgewählten Glühbirnen mindestens 2 „Montagsbirnen“ befinden?
   b) Unter wie vielen Glühbirnen findet man mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine „Montagsbirne“?
   c) Nun bekommt die Firma „Hellauf“ eine Lieferung von 2000 Glühbirnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der „Montagsbirnen“ zwischen 120 und 170.
   d) Zwischen welchen beiden symmetrisch um den Mittelwert liegenden Grenzen liegen mit 95%iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Montagsbirnen?

4. Bei einer Gesundenuntersuchung in einer Maturaklasse wurde auch die Körpergröße der weiblichen Maturanten festgestellt. Diese sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 168cm$und der Standardabweichung von 10 cm.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Maturantin zwischen 158 cm und 183 cm groß ist?
   b) Man berechne jenes um den Mittelwert symmetrische Intervall, in dem die Körpergröße von 90% der Maturantinnen liegt.!

Lösungen

1. Für Fußballer A beträgt die Wahrscheinlichkeit, ein Tor zu erzielen, 60 %. Er schießt 10-mal hintereinander auf ein Tor. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er
   a) mindestens 3-mal trifft
   b) Genau einmal trifft
   c) mindestens einmal trifft
   d) höchstens einmal trifft
   e) mindestens 4-mal, aber höchstens 7-mal trifft.
   f) Wie oft müsste er auf das Tor schießen, um mit mehr als 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Treffer zu erzielen?

X … Anzahl der Treffer $n = 10$ $p = 0{,}6$

a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) =$

$1 - P(X \leq 2) =$

$1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$

$1 -$ binomcdf[10, 0.6, 2]

1-(0,0001+0,00157+0,01062)=0,98771

1-0,01229=0,98771

98,7%

b) $P(X=1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^9 = 0{,}00157 \mathrel{\hat{=}} 0{,}157\%$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) =$

$1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4 = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999$

$\mathrel{\hat{=}} 99{,}99\%$

d) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$0{,}0001 + 0{,}00157 = 0{,}00167 \mathrel{\hat{=}} 0{,}167\%$

e) $P(4 \leq X \leq 7) = \ldots = 0{,}77795 \mathrel{\hat{=}} 77{,}8\%$

f) $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$

$$1 - P(X=0) \geq 0{,}99 \quad | + P(X=0) \; | -0{,}99$$

$$0{,}01 \geq P(X=0)$$

$$0{,}01 \geq \underbrace{\cancel{\binom{n}{0}}}_{1} \cdot \underbrace{\cancel{0{,}6^{0}}}_{1} \cdot 0{,}4^{n}$$

$$\ln 0{,}01 \geq n \cdot \ln 0{,}4$$

$$\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}4} \leq n$$

$$5{,}025 \leq n \quad \Rightarrow \quad n_0 = 6 \text{ mal schießen}$$

2) Bei einem Buchstabenlegespiel erhält ein Spieler 16 gleichartige Plättchen, von denen 5 den Buchstaben A, 5 den Buchstaben E, 3 den Buchstaben S und 3 den Buchstaben T tragen.

a) Der Spieler zieht nacheinander 3 Plättchen, und legt sie von links nach rechts auf den Tisch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Buchstaben die Wörter AST bzw. TAT ergeben!

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei gleich Buchstaben zu bekommen, wenn der Spieler gleichzeitig drei Plättchen zieht?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei gezogenen Plättchen mindestens zwei A dabei sind?

d) Ohne Wissen des Spielers wird ein zusätzliches Plättchen mit dem Buchstaben C zu seinen Plättchen gemischt. Wie oft muss der Spieler mindestens (mit Zurücklegen) ziehen, damit er die Manipulation mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% bemerkt, d.h. Das Plättchen mit dem Buchstaben C zieht?

a) $$P(AST) = \frac{5}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{3}{14} =$$

$$P(TAT) = \frac{3}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{14} =$$

b) $$P(\text{3 gleiche Buchstaben}) = P(AAA) + P(SSS) + P(TTT) + P(EEE) =$$

$$= \frac{\binom{5}{3}\binom{11}{0}}{\binom{16}{3}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{13}{0}}{\binom{16}{3}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{13}{0}}{\binom{16}{3}} + \frac{\binom{5}{3}\binom{11}{0}}{\binom{16}{3}} =$$

$$= \frac{10}{560} + \frac{1}{560} + \frac{1}{560} + \frac{10}{560} = \frac{22}{560} \approx 3{,}9\,\%$$

$$= \frac{11}{280} = 0{,}039$$

c) X… Anzahl der gezogenen A-Plättchen $n=3$

$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$

mit ZL (Binomialverteilung) $p = \frac{5}{16}$

$= \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{16}\right)^1 + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{16}\right)^0 =$

$= 0{,}20142 + 0{,}03052 = 0{,}23193$

$\approx 23{,}2\%$

d) $p = \frac{1}{17}$ $n = ?$

$P(X \geq 1) > 0{,}9$

$1 - P(X=0) > 0{,}9 \Rightarrow P(X=0) \leq 0{,}1$

$\cancel{\binom{n}{0}} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{17}\right)^0} \cdot \left(\frac{16}{17}\right)^n \leq 0{,}1$

$n \cdot \ln \frac{16}{17} \leq \ln 0{,}1$

$n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{16}{17}}$

$n \geq 37{,}98\ldots$

$\Rightarrow n_0 = 38$

A: Der Spieler muss mindestens 38 mal ziehen, um mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit die

3) Die Glühbirnenproduktion eines bestimmten Unternehmens enthält erfahrungsgemäß 8% „Montagsbirnen", d.h. Glühbirnen mit deutlich kürzerer Lebensdauer.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 10 zufällig ausgewählten Glühbirnen

3) Die Glühbirnenproduktion eines bestimmten Unternehmens enthält erfahrungsgemäß 8% „Montagsbirnen", d.h. Glühbirnen mit deutlich kürzerer Lebensdauer.

Kleinlichkeit die

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 10 zufällig ausgewählten Glühbirnen mindestens 2 „Montagsbirnen" befinden?

Manipulation gemerkt

b) Unter wie vielen Glühbirnen findet man mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine „Montagsbirne"?

c) Nun bekommt die Firma „Hellauf" eine Lieferung von 2000 Glühbirnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der „Montagsbirnen" zwischen 120 und 170.

d) Zwischen welchen beiden symmetrisch um den Mittelwert liegenden Grenzen liegen mit 95% iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Montagsbirnen?

X ... Anzahl der „Montagsbirnen" $n = 10$ $p = 8\%$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) =$$
$$1 - P(X \leq 1) =$$
$$1 - [P(X=0) + P(X=1)] =$$
$$1 - \left[\cancel{\binom{10}{0}}_{1} \cdot \cancel{0{,}08^0}_{1} \cdot 0{,}92^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^9\right] =$$
$$1 - [0{,}43439 + 0{,}37773] =$$
$$1 - 0{,}81212 = 0{,}18788$$
$$= 18{,}7\%$$

b) $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$

$$\Rightarrow P(X=0) \leq 0{,}01$$
$$\cancel{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \cancel{0{,}08^0}_{1} \cdot 0{,}92^n \leq 0{,}01$$
$$n \cdot \ln 0{,}92 \leq \ln 0{,}01$$
$$n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}92}$$

$$n \geq 55{,}23$$
$$\Rightarrow n_0 = 56$$

c) $\Rightarrow n = 2000 \Rightarrow$ Normalvert.

$\mu = n \cdot p = 2000 \cdot 0{,}08 = \frac{160}{\sqrt{147{,}2}} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{170-160}{\sqrt{147{,}2}} =$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 147{,}2 = 12{,}132 > 5$

$P(120 \leq X \leq 170) = P(\frac{120-160}{}$

$P(-3{,}297 \leq Z \leq 0{,}824) = \phi(0{,}824) - \phi(-3{,}297)$

$= 0{,}795 - 0{,}000489$

$= 0{,}7945 \approx 79{,}5\,\%$

d) $P(x_u < X \leq x_o) = 0{,}95$ (Streubereich) 136,22

$\Rightarrow {}_uX_o = \mu \pm z \cdot \sigma$

$\Rightarrow D(z) = 0{,}95 \Rightarrow z = \pm 1{,}96$ 183,78

$\Rightarrow [136 ; 183]$

4) Bei einer Gesundenuntersuchung in einer Maturaklasse wurde auch die Körpergröße der weiblichen Maturanten festgestellt. Diese sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 168cm$ und der Standardabweichung von 10 cm.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Maturantin zwischen 158 cm und 183 cm groß ist?
b) Man berechne jenes um den Mittelwert symmetrische Intervall, in dem die Körpergröße von 90% der Maturantinnen liegt.

X ... Körpergröße in cm

$P(158 \leq X \leq 183) = P\left(\frac{158-168}{10} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{183-168}{10}\right) =$

$= P(-1 \leq Z \leq 1{,}5) =$

$= \phi(1{,}5) - \phi(-1) =$

$= 0{,}9332 - 0{,}1586 =$

$= 0{,}7746 \approx 77{,}5\,\%$

TI82: normalcdf(158, 183, 168, 10) = ...

d) $P(x_u < X < x_o) = \underline{0{,}9} \Rightarrow \Phi(z) = 0{,}9$

$\Rightarrow z = \pm 1{,}645$

$z = \frac{{}_u x_o - \mu}{\sigma} \rightarrow {}_u x_o = \mu \pm z \cdot \sigma$

$x_u = 151{,}56$

$x_o = 184{,}44$

$[151{,}6 \,;\, 184{,}5]$