

KOSTEN- UND PREISTHEORIE

Eine Anwendung der Differentialrechnung in der Wirtschaft

Das Modellieren realer Situationen durch mathematische Modelle hat viele Anwendungsbereiche. Die hier beschriebenen Überlegungen stammen aus dem Bereich der Wirtschaftsmathematik, die sich unter anderem mit der Analyse von Kosten, Erlös und Gewinn, Angebot und Nachfrage usw. beschäftigt, wobei versucht wird, die Situation mittels Funktionen darzustellen und die Auswirkungen von Veränderungen zu interpretieren.

Wirtschaftswissenschaftler haben einfache mathematische Modelle entwickelt, mit deren Hilfe sich anfallende Kosten und zu erzielende Gewinne annähernd beschreiben lassen. Dabei muss man allerdings – wie bei jeder Modellbildung – von idealisierten Annahmen ausgehen, die in der Praxis nicht immer genau zutreffen. Abgesehen davon können selbst bei relativ genauer Modellbildung in der Realität Argumente über Produktionspläne relevant werden, die im Rahmen der Kosten- und Preistheorie nicht erfasst werden (können).

Weiters sei erwähnt, dass diese Zusammenfassung nur einen ausgewählten Ausschnitt der Kosten- und Preistheorie darstellt.

Die Kostenfunktion $K(x)$:

Bei der Produktion von Waren wie auch beim Handel mit Waren entstehen **Gesamtkosten K** , die sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammensetzen.

Fixkosten K_f sind von der Produktionsmenge unabhängig. Sie fallen selbst dann an, wenn nichts produziert wird (z.B. Miete, Grundgebühren, Personalkosten, Kreditrückzahlungsraten, ...).

Variable Kosten K_v hängen von der Produktionsmenge ab, z.B. Materialkosten oder Transportkosten.

Für die Gesamtkosten K eines Betriebes gilt im allgemeinen: $K = K_f + K_v$

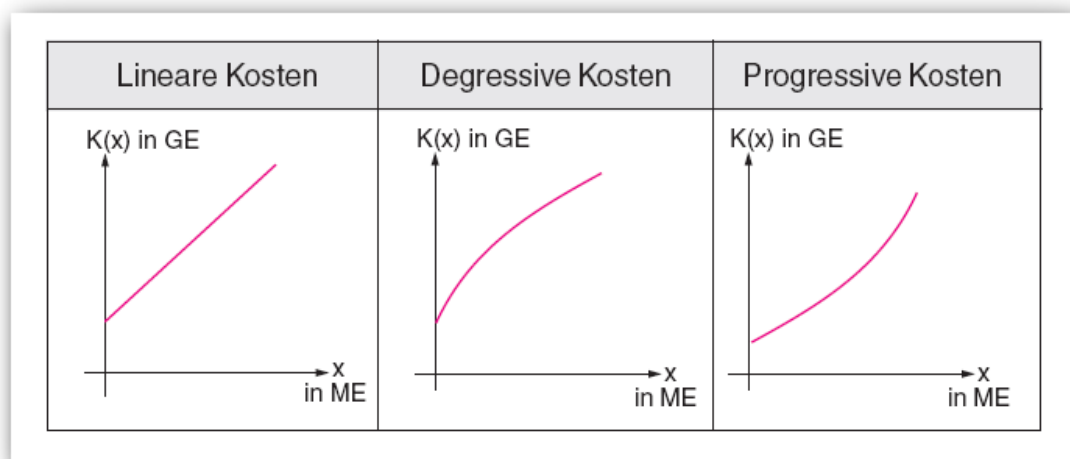
Da die Gesamtkosten K nun - zumindest zu einem großen Teil – von der produzierten Menge abhängt, bietet sich als mathematisches Beschreibungsmittel dieser Abhängigkeit die Funktion an. Gleiches gilt im übrigen auch für andere wirtschaftlich relevante Größen (z.B. Gewinn).

x ... Menge (Stückzahl, Masse, ...) des hergestellten Produkts; in ME (Mengeinheiten) angegeben

$K(x)$... Kostenfunktion; in GE (Geldeinheiten) angegeben

Für den Verlauf einer Kostenfunktion sind verschiedene Modelle möglich:

- Steigen die Kosten proportional zur produzierten Menge, entstehen **lineare Kosten**. Der Graph der Kostenfunktion ist eine Gerade.
- Wachsen die Kosten verhältnismäßig langsamer als die Stückzahl (Gründe: z.B. rationellere Arbeitsweise), so entstehen **degressive Kosten**.
- Wachsen hingegen die Kosten verhältnismäßig schneller als die Stückzahl (Gründe: z.B. höhere Abnutzung der Maschinen ab einer bestimmten Produktionsmenge, Überstunden), so entstehen **progressive Kosten**.



In der Realität haben Kosten oft bei kleinen Produktionsmengen einen degressiven, bei größeren Mengen hingegen einen progressiven Verlauf. Der Grund ist darin zu suchen, dass bei geringer Kapazitätsauslastung eine Erhöhung der Produktionsmenge eine bessere Nutzung der Ressourcen oder einen günstigeren Beschaffungspreis (Mengenrabatt bei Materialbestellung) ermöglicht. Ab einer bestimmten Produktionsmenge können dann die Kosten aber wieder überproportional zunehmen (z.B. wegen Überstunden, Maschinenüberlastung, ...). Für diese „s-förmigen“ Kostenverläufe bietet sich als Modell die Polynomfunktion dritten Grades an.

Der Übergang vom degressiven zum progressiven Kostenverlauf wird als **Kostenkehre** bezeichnet und ist der Wendepunkt der Kostenfunktion.

$$\boxed{K''(x) = 0} \quad \dots \quad \text{Kostenkehre}$$

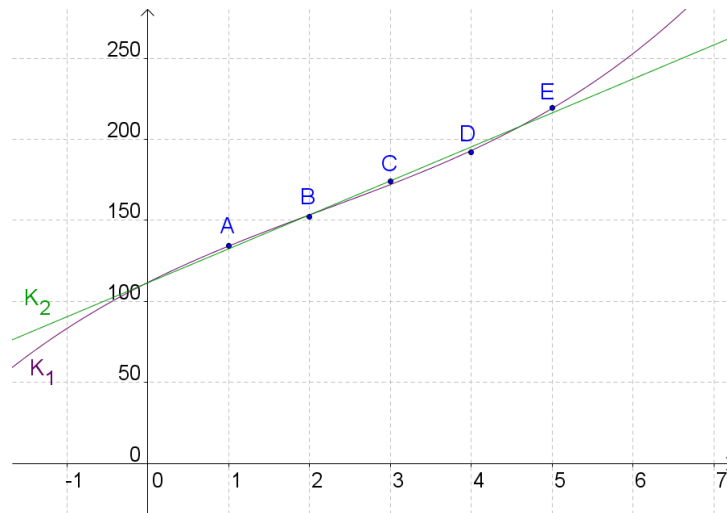
In der betrieblichen Praxis sind Kostenfunktionen im Allgemeinen nicht vorgegeben. Vielmehr wird aus beobachteten Zusammenhängen zwischen Menge x und Kosten K mit Hilfe der **Regressionsrechnung** eine Kostenfunktion $K(x)$ ermittelt, die diesen Zusammenhang möglichst gut beschreibt (Methode der kleinsten Quadrate).

Beispiel: In einem Betrieb wurden folgende Gesamtkosten K abhängig von der produzierten Menge x festgestellt:

x (in ME)	1	2	3	4	5
$K(x)$ (in GE)	134,5	152,1	174	191,8	219,4

Je nach vermuteter Abhängigkeit (linear, kubisch, ...) der Kosten von der Menge x ergeben sich unterschiedliche Kostenfunktionen. Welche von diesen die realen Verhältnisse am besten beschreibt, entscheidet der Vergleich mit den realen Kosten.

In der folgenden Abbildung sind zwei Kostenfunktionen K_1 (kubisch) und K_2 (linear) für das vorliegende Beispiel eingezeichnet:



Ihre Funktionsgleichungen lauten:

$$K_1(x) = 20,95x + 111,51 \text{ (linear)}$$

$$K_2(x) = 0,458x^3 - 2,989x^2 + 24,952x + 111,76 \text{ (kubisch)}$$

Die mathematischen Verfahren der Regressionsrechnung eignen sich kaum für eine händische Berechnung. Daher wird auf dieses Thema hier nicht näher eingegangen.

Die Stückkostenfunktion $\bar{K}(x)$ und das Betriebsoptimum:

Für eine Firma ist es interessant zu wissen, wie hoch die durchschnittlichen Kosten für ein Produkt in einem bestimmten Bereich sind. Dies ist notwendig, um einen „vernünftigen Preis“ festzulegen.

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$$

... **Stückkostenfunktion**

Das Minimum der Stückkostenfunktion x_{opt} wird als **Betriebsoptimum** bezeichnet. Die durchschnittlichen Kosten pro ME erreichen dort ihr Minimum. In der Sprache der Kurvendiskussionen ist das Betriebsoptimum also die x -Koordinate des Tiefpunktes von $\bar{K}(x)$.

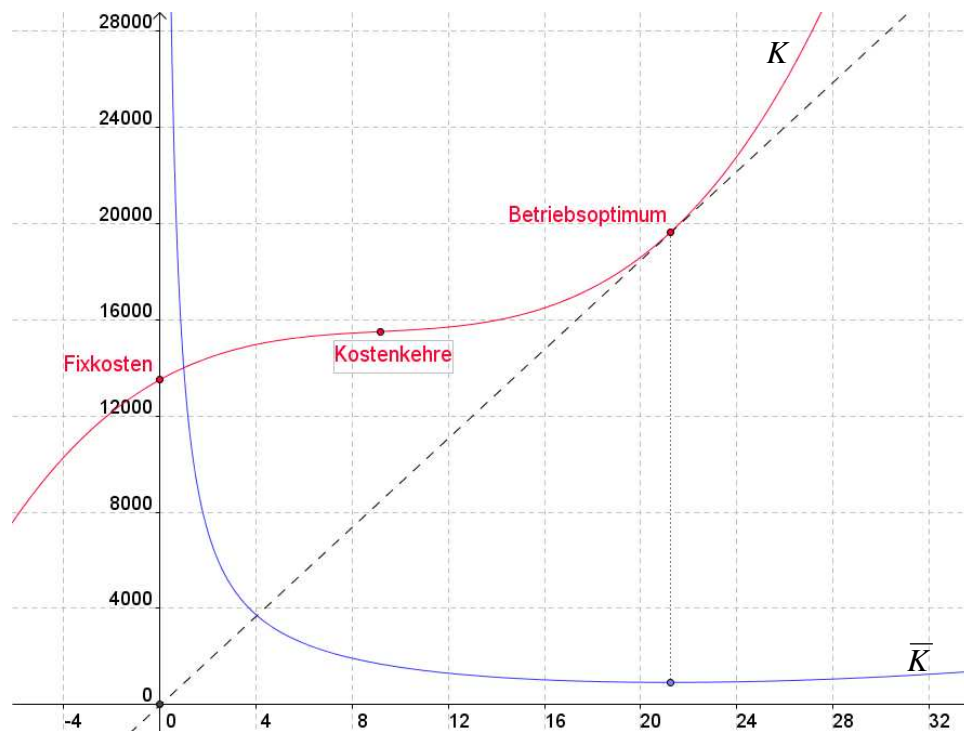
$$\bar{K}'(x) = 0$$

... **Betriebsoptimum**

Der Wert $p_0 = \bar{K}(x_{opt})$ wird als **langfristige Preisuntergrenze** (Grenzbetrieb) bezeichnet und legt damit jenen Preis pro ME fest, der mindestens verlangt werden muss, um gerade noch kostendeckend zu produzieren.

Graphisch gesehen liegt das Betriebsoptimum dort, wo die Ursprungsgerade Tangente an die Gesamtkostenfunktion ist.

Beispiel: $K(x) = 2x^3 - 55x^2 + 555x + 13500$



Nachdem bis hierher nur von den Produktionskosten die Rede war, soll nun das Augenmerk auf den Verkauf der produzierten Ware gelegt werden.

Die Preisfunktion $p(x)$:

Zunächst hängen Erlös (umgangssprachlich oft auch „Umsatz“ genannt) und damit auch Gewinn davon ab, welcher Preis pro ME auf dem Markt festgesetzt werden kann. Dieser Preis hängt aber wiederum mit der Nachfrage nach dem produzierten Gut zusammen.

Die Funktion $p(x)$ gibt den Preis pro ME in Abhängigkeit der nachgefragten Menge x an. Genau genommen liegt eine Funktion $x(p)$ vor (die sogenannte **Nachfragefunktion**), da sich die nachgefragte Menge nach dem festgesetzten Preis richtet. Es ist jedoch üblich, ME auf der waagrechten und GE auf der senkrechten Achse einzuzichnen; daher wird meist mit der Umkehrfunktion $p(x)$, der **Preisfunktion** gerechnet.

Besitzt eine Firma die Alleinproduktion für eine Ware, so spricht man von einem **Monopolbetrieb**. Der Preis für die Ware wird dann vom Hersteller allein bestimmt. Gerade für den Monopolisten gilt:

In der Regel führt eine Preiserhöhung zu einer geringeren Nachfrage, weswegen die charakteristischen Preisfunktionen meist streng monoton fallend sind. Das ist jedoch nicht bei allen Gütern der Fall. Bei Prestige- oder Luxusgütern etwa kann ein hoher Preis Bestandteil des „Glamours“ sein, wodurch bei hohen Preisen sogar mehr gekauft wird als bei geringen („Massenware“, „billiger Schund“).

Für eine streng monoton fallende Preisfunktion gibt es im Allgemeinen zwei Extremzustände:

$p(x=0)$... **Prohibitivpreis (Maximalpreis)**, d.h. niemand ist mehr bereit, das Produkt zu diesem Preis zu kaufen

$x(p=0)$... **Sättigungsmenge**, d.h. das Produkt wird nicht mehr gekauft, da der Markt gesättigt ist

Wird ein Produkt auf dem Markt von vielen Herstellern angeboten, so kann sich nach dem Auspendeln von Angebot und Nachfrage ein fester Preis p für dieses Produkt einstellen. In diesem Fall ist die Preisfunktion $p(x) = p$ konstant.

Die Erlösfunktion $E(x)$:

Die Erlösfunktion gibt den Erlös an, der beim Verkauf von x produzierten ME erzielt wird.

$$E(x) = p(x) \cdot x \quad \text{Erlösfunktion}$$

Im Fall einer konstanten Preisfunktion ist die Erlösfunktion linear, d.h. $E(x) = p \cdot x$

Die Gewinnfunktion $G(x)$:

$$G(x) = E(x) - K(x) \quad \text{Gewinnfunktion}$$

Ein Gewinn wird erzielt, wenn der Erlös größer ist als die Gesamtkosten. Wird nur eine geringe Menge des Produkts verkauft, sind die Kosten im Allgemeinen höher als der Erlös; die Firma macht Verlust. Jene Menge, bei der der Erlös gerade so groß ist, dass die Gesamtkosten gedeckt werden können, wird als **Gewinnschwelle** („**Break-Even-Punkt**“) bezeichnet.

Da die Kosten im Normalfall ab einer bestimmten Menge wieder überproportional steigen, werden für eine bestimmte größere Menge x Erlös und Kosten wieder gleich hoch sein. Dieser Wert wird als **Gewinngrenze** bezeichnet. Produziert man mehr als die Gewinngrenze, muss ebenso mit Verlust gerechnet werden.

$$G(x) = 0 \quad \text{Gewinnschwelle bzw. Gewinngrenze}$$

Beide Werte (Gewinnschwelle und Gewinngrenze) sind die Nullstellen der Gewinnfunktion. Von besonderem Interesse ist natürlich jene Menge x_{max} , bei der ein maximaler Gewinn erzielt werden kann. Dieser Wert ergibt sich als Hochpunkt der Gewinnfunktion.

$$\boxed{G'(x) = 0}$$

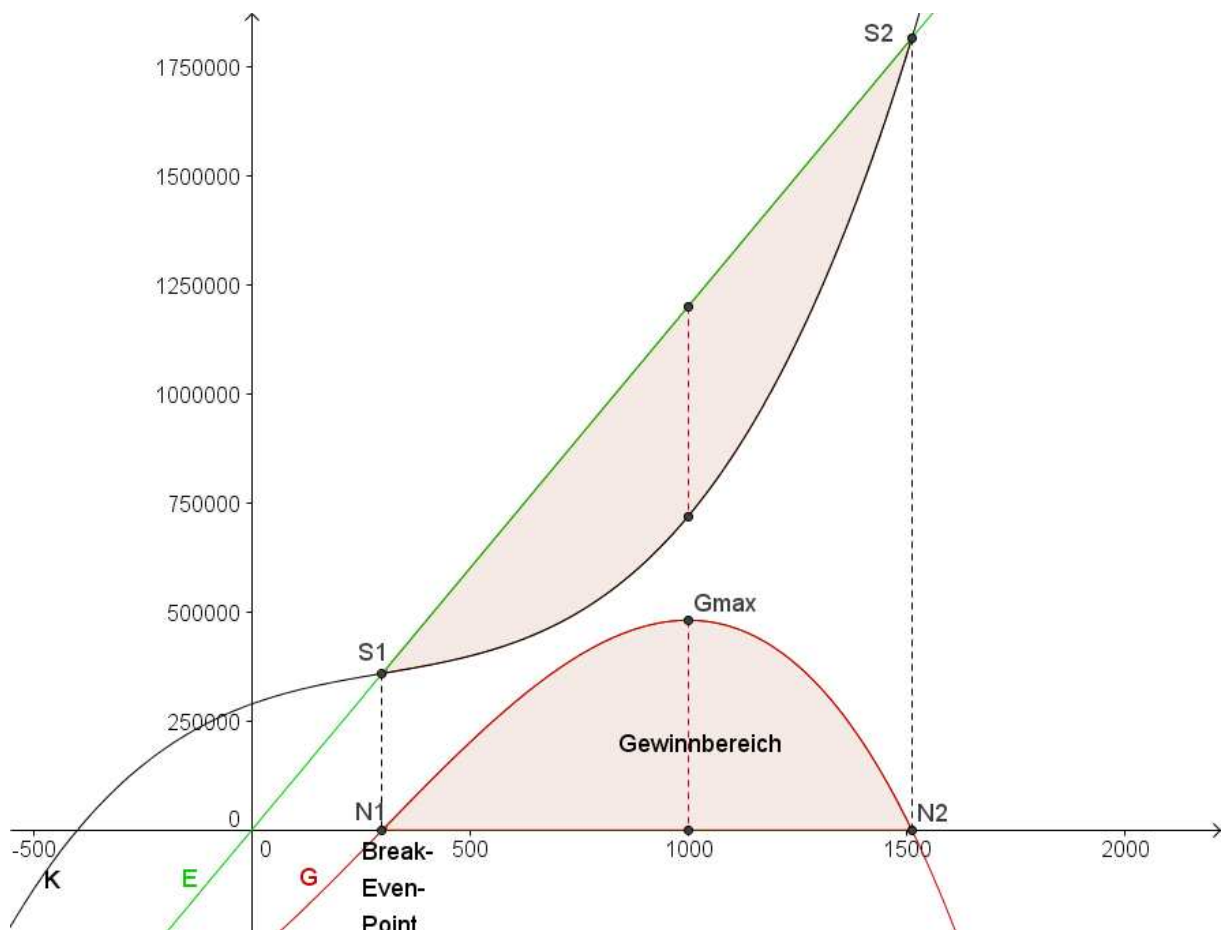
maximaler Gewinn

Durch x_{max} aus der Gewinnfunktion $G(x)$ wird auf dem Graphen der Preisfunktion $p(x)$ ein Punkt festgelegt, der nach dem Wirtschaftsmathematiker Antoine August COURNOT (1801 – 1877) als **COURNOT'scher Punkt** bezeichnet wird. Gibt es mehrere Maxima, spricht man von der **COURNOT'schen Menge**.

$$\boxed{C(x_{max} / p(x_{max}))}$$

COURNOT'scher Punkt

Beispiel: $K(x) = 0,0007x^3 - 0,63x^2 + 360x + 289000$
 $E(x) = 1200x$



Bezeichnungen: K ... Kostenfunktion
 E ... Erlösfunktion
 G ... Gewinnfunktion