Kurvendiskussion – Blatt 1

1) Bestimme Definitionsmenge, Symmetrie und Asymptoten:

a) $y = \frac{x^3 - 4}{x}$ b) $y = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$ c) $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

2) Diskutiere (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Wendetangenten, Graph) die gegebenen Funktionen:

a) $y = x^4 - 6x^2 + 5$ b) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

c) $y = 0{,}1x^4 - 0{,}8x^3 + 1{,}8x^2$.

3) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades geht durch P(2/-2) und durch Q(4/8). Im Punkt P beträgt der Anstieg –1, während die 2. Ableitung dort den Wert 2 hat.

4) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat im Punkt P(-2/8) eine waagrechte Tangente. An der Stelle $x_2 = 3$ beträgt der Anstieg –15, an der Stelle $x_3 = 1$ liegt ein Wendepunkt vor.

5) Eine durch den Koordinatenursprung gehende ganzrationale Funktion vierten Grades geht durch den Punkt A(-2/12) und B(2/y_2). B ist ein Wendepunkt. An der Stelle $x_3 = -1$ besitzt die Funktion eine zur x-Achse parallele Wendetangente.

6) Von einer Parabel 3. Ordnung sind der Wendepunkt W(3,5/19,25) und ein Extrempunkt P(5/12,5) gegeben. Handelt es sich bei dem Punkt P um einen Hoch- oder um einen Tiefpunkt? Wie lauten die Koordinaten des zweiten Extrempunktes der Parabel ?

7) a) Ermittele die Koeffizienten einer Polynomfunktion 3. Grades $f: y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, deren Graph im Ursprung den Wendepunkt und in $A\left(2;\frac{2}{3}\right)$ die Steigung $k = 3$ hat.

b) Diskutiere die Funktion und zeichne den Graphen im Intervall $[3\,;3]$.

Lösungen:

1) a) D = R \ {0}, keine Symmetrie, x = 0, g(x) = x^2

b) D = R \ {-1,1}, ungerade Symmetrie, x = 1, x = -1, g(x) = x

c) D = R \ {-2,2}, gerade Symmetrie, x = 2, x = -2, g(x) = 1

2) a) $N_{1,2}(\pm 1/0)$, $N_{3,4}(\pm 2{,}24/0)$, H(0/5), $T_{1,2}(\pm 1{,}73/-4)$, $W_{1,2}(\pm 1/0)$, $t_{W1,2}: y = \pm 8x + 8$

b) $N_1(0/0)$, $N_2(3/0)$, T(3/0), H(1/4), W(2/2), $t_W: y = -3x + 8$

c) N(0/0), T(0/0), S(3/2,7), W(1/1,1), t_S: y = 2,7, t_{W1}: y = 1,6x - 0,5

3) $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 4$

4) $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 20$

5) $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 14x$

6) $y = x^3 - 10{,}5x^2 + 30x$, H(2/26)

7) a) $y = x^3 - x$ b) $N_1(0/0)$ $N_{2,3}(\pm\sqrt{3}/0)$ $T(1/-\frac{2}{3})$ $H(-1/\frac{2}{3})$ $W(0/0)$

Kurvendiskussion – Blatt 2

1) Diskutiere die gebrochenrationalen Funktionen und zeichne die Graphen:

a) $y = \frac{x}{1+x^2}$ b) $y = x + \frac{1}{x}$ c) $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

2) Diskutiere die nichtrationalen Funktionen und zeichne die Graphen:

a) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ b) $y = x^2.e^{-x}$ c) $y = x.\ln x$

d) $y = (x^2 - 1).e^{-x}$ e) $y = x.(\ln x)^2$

3) Gegeben ist die Funktion $y = \frac{a - bx^2}{x^2 - 4}$.
Berechne a und b und die Funktionsgleichung, wenn zusätzlich gegeben sind:

a) Punkt P(1/1) und Extremwert E(4/y);

b) Nullstelle N(3/0) und Anstieg bei x=1 ist –1.

4) Eine gebrochenrationale Funktion f hat die Form $y = \frac{1+x}{ax}$.
Der dazugehörige Graph hat im Punkt $P(2/\frac{3}{2})$ die Steigung $k = -\frac{1}{4}$.

a) Bestimme die Funktionsgleichung!
b) In welchen Punkten Q_n hat die Tangente an die Kurve die Neigung von 135° zur x-Achse?
c) Berechne den Schnittpunkt zwischen der Tangente an den Graphen im Punkt Q (x>0) und der waagrechten Asymptote.

Lösungen:

1) a) D = R, ungerade S., A: g(x) = 0, N(0/0), H(1/0,5), T(-1/-0,5), W_1(0/0), W_2(1,73/0,43), W_3 (-1,73/-0,43)
b) D = R \ {0}, ungerade S., A.: x = 0, g(x) = x, T(1/2), H(-1/-2)
c) D = R \ {1}, keine S.; A.: x = 1, g(x) = x + 2, N(0/0), T(3/6,75), S(0/0)

2) a) D = R, gerade S., A.: g(x) = 0, H(0/1), W_1 (1/0,607), W_2 (-1/0,607)
b) D = R, keine S.; N(0/0), T(0/0), H(2/0,54), W_1(3,4/0,4), W_2 (0,6/0,2)
c) D = R^+, keine S.; N(1/0), T(0,37/-0,37)
d) D = R, keine S.; keine Polstelle; N(±1/0); H(2,41/0,43); T(–0,41/-1,25); W_1(3,73/0,31); W_2(0,27/–0,71)
e) D = R^+, keine S.; keine Polstellen; N(1/0); T(1/0); H(0,14/0,54); W(0,37/0,37)

3) a) a = -4 ; b = -1 ; f : y=1 Lücke bei x = +/- 2
b) a = 8,1; b= 0,9 $f: y = \frac{81 - 9x^2}{10.(x^2 - 4)}$

4) $y = \frac{1+x}{x}$ $Q_1(1/2)$ $Q_2(-1/0)$ $As: y = 1$ $t: y = -x + 3$ $S(2/1)$