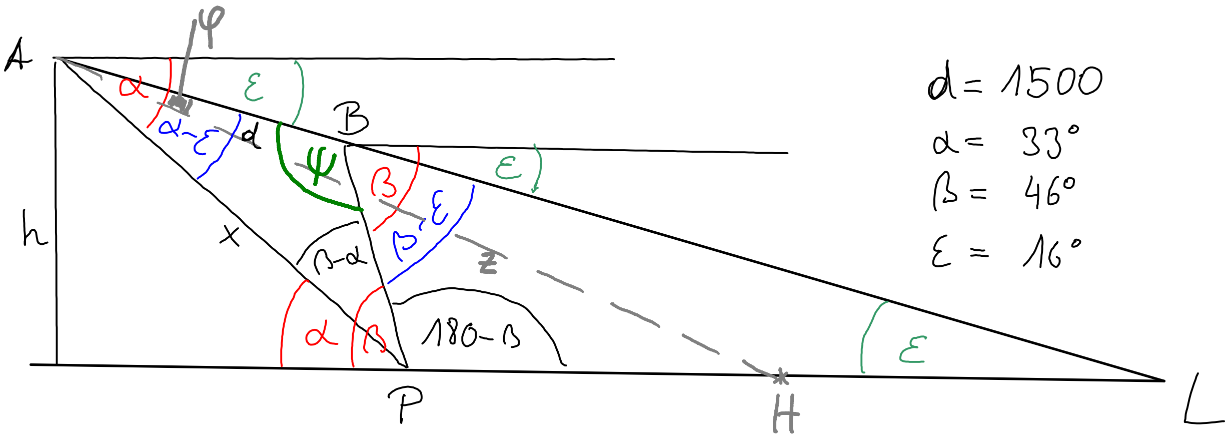
Beispiel 1

Donnerstag, 17. Juni 2010
17:38

Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug längs einer Geraden, die um ε = 16° gegen die horizontale Landeebene geneigt ist. Von einem Punkt A der Flugbahn aus sieht man einen Punkt P, der in einer Vertikalebene unterhalb der Flugbahn liegt, unter einem Tiefenwinkel α= 33. Nachdem das Flugzeug 1500 m auf seiner Anflugbahn zum Punkt B weiter geflogen ist, misst man von dort aus den Tiefenwinkel β = 46° zum Punkt P.

Man berechne

a) die Flughöhe des Flugzeuges im Punkt A
b) die Entfernung des Punktes A vom Landepunkt L, wenn das Flugzeug seine Bahn beibehält
c) die Entfernung der Punkte P und L voneinander
d) den Tiefenwinkel, unter dem man von A aus den Halbierungspunkt H der Strecke $\overline{PL}$ erblickt.



$d = 1500$
$\alpha = 33°$
$\beta = 46°$
$\varepsilon = 16°$

$\psi = 180 - (\beta - \varepsilon) = 150°$

$\frac{x}{\sin\psi} = \frac{d}{\sin(\beta-\alpha)} \Rightarrow x = \frac{d \cdot \sin\psi}{\sin(\beta-\alpha)} = 3334{,}058$

$\sin\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot \sin\alpha = 1815{,}858$

b) $\sin\varepsilon = \frac{h}{\overline{AL}} \Rightarrow \overline{AL} = \frac{h}{\sin\varepsilon} = 6587{,}853$

c) $\overline{BL} = \overline{AL} - 1500 = 5087{,}853$

$\frac{\overline{PL}}{\sin(\beta-\varepsilon)} = \frac{\overline{BL}}{\sin(180-\beta)} \Rightarrow \overline{PL} = \frac{\overline{BL} \cdot \sin(\beta-\varepsilon)}{\sin(180-\beta)} = 3536{,}47$

d) $\overline{HL} = \frac{\overline{PL}}{2} = 1768{,}237$

$z^2 = \overline{HL}^2 + \overline{AL}^2 - 2 \cdot \overline{HL} \cdot \overline{AL} \cdot \cos\varepsilon \Rightarrow z = 4912{,}35$

Freitag, 18. Juni 2010
22:08

$$\frac{\sin\varphi}{\overline{HL}} = \frac{\sin\varepsilon}{z} \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{\overline{HL}\cdot\sin\varepsilon}{z}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\overline{HL}\cdot\sin\varepsilon}{z}\right) = 5{,}694°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi' = \varphi + \varepsilon = 21{,}69°$$

Beispiel 2

Donnerstag, 17. Juni 2010
17:44

Ein beliebtes Spiel ist das "Paschen" oder "Mäxen", dabei werden 2 Würfel (verdeckt) gleichzeitig geworfen und danach darf der Spieler dem Nebenansitzenden die Würfel verdeckt mit einer wahren oder falschen Aussage weitergeben. Die Reihenfolge der Würfel ist egal!

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit ein "Mäxchen" (= Augenzahl 2 und 1) gleich 1/18 ist!
b) Wie oft muss man werfen um mit (mindestens) 95% Wahrscheinlichkeit mindestens ein "Mäxchen" zu erhalten?

An die Qualität der Würfel für Casinos in Las Vegas werden sehr hohe Ansprüche gesetzt. Aus Erfahrung weiß man, dass ca. 23% der produzierten Würfel wieder eingeschmolzen werden müssen, da sie nicht die Ansprüche des „Las-Vegas-Standards" erfüllen. Das „Caesar's Palace" bestelt 5000 Würfel.

c) Wie viele „Las-Vegas-Standard"-Würfel sind zu erwarten?
d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das „Caesar's" weniger als die benötigten 3800 „Las-Vegas-Standard"-Würfel erhält?
e) Das „Caeser's" will mit 99% Wahrscheinlichkeit wissen in welchem (um den Erwartungswert symmetrischen) Bereich die Anzahl der „Las-Vegas-Standard"-Würfel liegen. Helfen Sie den Managern bei der Beantwortung der Frage!

a) $P(\text{Mäxchen}) = P(21) + P(12) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \underline{\frac{1}{18}}$

b) X.. Anzahl der Mäxchen

$\hat{P}(\hat{X} \geq 1) \geq 0{,}95$

$P(X=0) \leq 0{,}05$

$\cancel{\binom{n}{0}} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{18}\right)^0} \cdot \left(\frac{17}{18}\right)^n \leq 0{,}05$

$\left(\frac{17}{18}\right)^n \leq 0{,}05 \quad / \ln$

$n \cdot \ln\frac{17}{18} \leq \ln 0{,}05 \quad / : \ln\frac{17}{18}$

$n \geq \frac{\ln 0{,}05}{\ln\frac{17}{18}} = 52{,}41 \Rightarrow n_0 = 53$

A: Man muss mindestens 53mal würfeln

c) X.. Anzahl der „Las-Vegas-Standard"-Würfel

$p = 0{,}77 \qquad q = 0{,}23$

$E(X) = \mu = 5000 \cdot 0{,}77 = 3850 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{885{,}5} = 29{,}75\ldots$

d) $P(X \leq 3800) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{3800-3850}{29{,}75}\right) =$

$= P(Z \leq 1{,}68) = \Phi(1{,}68) = 0{,}04645$

$\hat{=}\ 4{,}6\%$

e) Streubereich $= 99\% \Rightarrow D(z) = 0{,}99$

$\Rightarrow z = \pm 2{,}5758 = \cancel{\frac{{}_uX_o - 3850}{\sqrt{885{,}5}}}$

${}_uX_o = 3850 \pm 2{,}5758 \cdot \sqrt{885{,}5}$

${}_uX_o = 3850 \pm 76{,}65$

$[3773 ; 3927]$

Beispiel 3

Donnerstag, 17. Juni 2010
17:44

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{12 - 2x}$ und der Punkt P $(1{,}5 \mid y > 0)$.

a) Bestimmen sie die Gleichung der Tangente t im Punkt P!

b) Die Tangente t, die Funktion f(x) und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück, das um die x-Achse rotiert. Wie groß ist dieses Volumen?

c) Zeigen Sie, dass jene quadratische Funktion g, die die Nullstelle der Funktion f, die Nullstelle der Tangente t und den Punkt P beinhaltet $g(x) = \frac{74}{999}x^2 - \frac{11}{9}x + \frac{14}{3}$ lautet!

d) Berechnen sie die Fläche, die die Funktion f und g einschließt!

a) $f(x) = \sqrt{12 - 2x} = (12-2x)^{\frac{1}{2}}$

$P \in f(x): \quad y_P = f(1{,}5) = \sqrt{12 - 2 \cdot 1{,}5} = 3 \quad \Rightarrow P(1{,}5 \mid 3)$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (12-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) = \frac{-\cancel{2}\,1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{12-2x}} = -\frac{1}{\sqrt{12-2x}}$

$f'(1{,}5) = -\frac{1}{\sqrt{12 - 2 \cdot 1{,}5}} = -\frac{1}{3} = k_P$

$t: \quad y = kx + d$

$3 = -\frac{1}{3} \cdot 1{,}5 + d \quad \Rightarrow \quad d = 3 + \frac{1{,}5}{3} = 3{,}5 = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow t: \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{2}$

b) Nullstelle t: $0 = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{2}$

$\frac{1}{3}x = \frac{7}{2}$

$x = \frac{21}{2} = 10{,}5$

$N_t = (10{,}5 \mid 0)$

Nullstelle f: $0 = \sqrt{12-2x} \quad /^2$

$0 = 12 - 2x$

$6 = x$

$N_f = (6 \mid 0)$

$$V_1 = \pi \cdot \int_{1,5}^{10,5} \left(-\frac{1}{3}x + \frac{7}{2}\right)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_{1,5}^{10,5} +\frac{1}{9}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{4} \cdot dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{7}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{49}{4}x \Big|_{1,5}^{10,5}\right)$$

$$= \quad \dots \quad = 27\pi$$

oder kürzer: $V_1 = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{3^{\cancel{2}} \cdot \pi \cdot (10,5-1,5)}{\cancel{3}} = 27\pi$

$$V_2 = \pi \cdot \int_{1,5}^{6} \sqrt{12-2x}^{\,2} \cdot dx = \pi \cdot \int_{1,5}^{6} 12-2x \cdot dx =$$

$$= \pi \cdot \left(12x - \cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} \Big|_{1,5}^{6}\right) = 20,25 \cdot \pi$$

$$V = V_1 - V_2 = 27\pi - 20,75\pi = 6,75\pi = 21,2 \text{ E}^3$$

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

I $P \in g$: $g(1,5) = 3 = a \cdot 1,5^2 + b \cdot 1,5 + c$

II $N_t \in g$: $g(10,5) = 0 = a \cdot 10,5^2 + b \cdot 10,5 + c$

III $N_f \in g$: $g(6) = 0 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c$

$$A = \begin{pmatrix} 1,5^2 & 1,5 & 1 \\ 10,5^2 & 10,5 & 1 \\ 6^2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{TR}: \quad A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0,\overline{074} \\ -1,\dot{2} \\ 4,\dot{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{74}{999} \\ -\frac{11}{9} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{74}{999}x^2 - \frac{11}{9}x + \frac{14}{3} \quad ✓$$

Freitag, 18. Juni 2010
22:20

d) $f \cap g \Rightarrow P, N_f$ (muss so sein)

$$A = \int_{1,5}^{6} \sqrt{12-2x} - \left(\frac{74}{999}x^2 - \frac{11}{9}x + \frac{14}{3}\right) \cdot dx = \dots = 3{,}375\ E^2$$

Beispiel 4

Donnerstag, 17. Juni 2010
17:48

Für ein Produkt ist der Preis durch $p(x) = 4 \cdot (5 - x)^2$ gegeben, die Gesamtkostenfunktion durch $K(x) = 2x^3 - 19x^2 + 64x + 4$. (x = Menge in Tonnen, K(x) und p(x) in Euro)

a) Bestimmen Sie die Kostenkehre!
b) Bei welcher Menge wird das Betriebsoptimum erzielt?
c) Welche Absatzmenge (in Tonnen) führt zum größten Gewinn und wie hoch ist dieser?

a) KK $\Leftrightarrow$ $f''(x) = 0$

$f'(x) = 6x^2 - 38x + 64$

$f''(x) = 12x - 38 = 0$

$12x = 38$

$x = \frac{38}{12} = \frac{19}{6} = 3{,}1\dot{6}$ $\Rightarrow$ 3166 kg

b) BOP $\Leftrightarrow$ $\overline{K}'(x) = 0$

$\overline{K}(x) = \frac{2x^3 - 19x^2 + 64x + 4}{x} = 2x^2 - 19x + 64 + \frac{4}{x}$

$\overline{K}'(x) = 4x - 19 - \frac{4}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$

$4x^3 - 19x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow$ TR: $x = 4{,}7935$

Bei einer Menge von 4,7935 t wird das BOP erzielt.

c) $G \Rightarrow MAX$

$$G(x) = E(x) - K(x)$$
$$G(x) = x \cdot 4 \cdot (5-x)^2 - (2x^3 - 19x^2 + 64x + 4)$$
$$G(x) = 4x \cdot (25 - 10x + x^2) - 2x^3 + 19x^2 - 64x - 4$$
$$G(x) = 100x - \cancel{40x^2} + \cancel{4x^3} - 2x^3 + 19x^2 - 64x - 4$$
$$G(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 4$$

$$G'(x) = 6x^2 - 42x + 36 = 0 \;/ :6 \qquad G''(x) = 12x - 42$$
$$x^2 - 7x + 6 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = +1 \qquad G''(1) < 0 \Rightarrow MAX$$
$$x_2 = +6 \qquad G''(6) > 0 \Rightarrow MIN$$

$$\Rightarrow x_{max} = 1 \quad \hat{=} \quad 1000\,kg$$
$$G(1) = 2 \cdot 1^3 - 21 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 - 4 = 13\,€$$

A: Max. Gewinn von 13 € bei 1 t

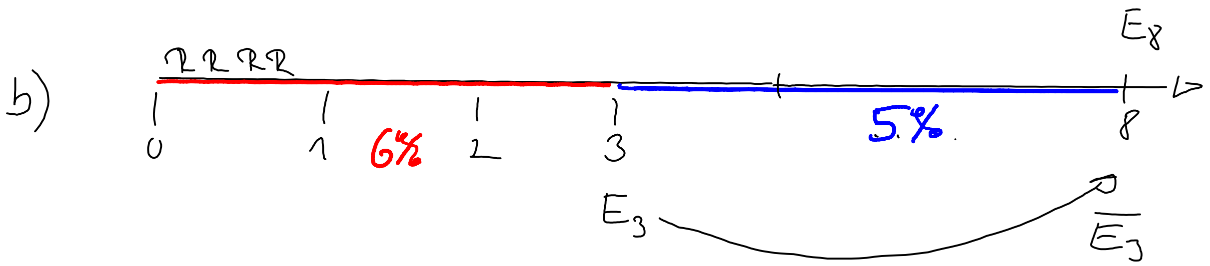
Herr K. aus S. will für eine private Zusatzversicherung in 8 Jahren 10.000 € ansparen.

a) Welche nachschüssigen Quartalsraten muss er bei der Bank bei einem Zinssatz von 6% (p.a.) anlegen?
b) Nach 3 Jahren wird der Zinssatz von der Bank auf 5% (p.a.) gesenkt. Welcher Betrag wird ihm am Ende auf 10.000 € fehlen, wenn er die Raten in der bisherigen Höhe weiterzahlt?
c) Wie viel muss Herr K. aus S. pro Monat (nachschüssig) zusätzlich einzahlen, damit er sein Sparziel trotzdem erreicht?
d) Von den 10.000 € lässt er sich (zu 5%) monatlich 250 € am Monatsersten auszahlen. Wie lange kann er dies machen und wie hoch ist die letzte Auszahlung, wenn der Rentenrest mit der letzten Monatsrente ausgezahlt wird?

a) $r = 1{,}06 \Rightarrow r_4 = \sqrt[4]{1{,}06} = 1{,}01467\ldots$

$$E = R \cdot \frac{r_4^{32}-1}{r_4-1} \Rightarrow R = \frac{E(r_4-1)}{r_4^{32}-1} = 247{,}09\,€$$

b)



$$E_3 = R \cdot \frac{r_4^{12}-1}{r_4-1} = 3216{,}58027\,€$$

$$\overline{E_3} = E_3 \cdot r^5 = 4105{,}26093\,€$$

$$E_8 = R \cdot \frac{r_4^{20}-1}{r_4-1} = 5562{,}6717\,€$$

$r = 1{,}05$

$r_4 = \sqrt[4]{1{,}05} = 1{,}0122\ldots$

$$E = E_8 + \overline{E_3} = 9667{,}93\,€$$

↳ Differenz zu 10.000 $= 332{,}067\,€$

c) $$E = \overline{R} \cdot \frac{r_{12}^{60}-1}{r_{12}-1} \Rightarrow \overline{R} = \frac{E \cdot (r_{12}-1)}{r_{12}^{60}-1}$$

$$\overline{R} = 4{,}896\,€ \approx 4{,}90\,€$$

d)

$$10.000 = 250 \cdot \frac{v_{12}^{n} - 1}{v_{12} - 1}$$

$$40 \cdot (v_{12} - 1) + 1 = v_{12}^{n} \quad / \ln$$

$$\ln(40 \cdot (v_{12} - 1) + 1) = n \cdot \ln v_{12}$$

$$\frac{\ln(40 \cdot (v_{12} - 1) + 1)}{\ln v_{12}} = n = 43{,}55$$

$\Rightarrow$ 43 Vollraten

$$B = 250 \cdot \frac{v_{12}^{43} - 1}{v_{12} - 1} = 9882{,}79$$

$RR_0 = 117{,}203$ €

$RR_{429} = 139{,}02$ €

A: Er bekommt 43 vollrate und die letzte Rate beträgt 250 + 139,02=389,02 €

Beispiel 6

Donnerstag, 17. Juni 2010
17:44

Beim Stadtfest trinkt jemand „etwas“ Bier und misst um 24:00 Uhr einen Alkoholspiegel von 1,3 Promille. Der Körper braucht ungefähr 5,4 Stunden um die Hälfte des Alkohols abzubauen. Wie hoch ist der Alkoholgehalt in Promille am nächsten Tag um 8:00 Uhr unter Annahme einer exponentiellen Abnahme?

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{N_0} = \cancel{N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot 5{,}4} \quad / \ln$$

$$\ln \frac{1}{2} = -\lambda \cdot 5{,}4 \cdot \underbrace{\ln e}_{1}$$

$$\frac{\ln \frac{1}{2}}{-5{,}4} = \lambda = 0{,}12836$$

$$N_0 = 1{,}3‰ \qquad ? \quad N(8) = 1{,}3 \cdot e^{-\lambda \cdot 8}$$

$$N(8) = 1{,}3 \cdot 0{,}3581$$

$$N(8) = 0{,}465 ‰$$

A: Der Alkoholgehalt um 8:00 Uhr des nächsten Tages beträgt 0,465‰.