Wahrscheinlichkeitsrechnung

1)
In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, wobei eine Kugel mit der Ziffer 1, drei mit der Ziffer 3 und sechs mit der Ziffer 6 beschriftet sind.

a) Der Urne werden zwei Kugeln mit einem Griff entnommen.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_1: „Beide Kugeln haben die Aufschrift 6."
E_2: „Beide Kugeln haben die gleiche Aufschrift."

b) Der Urne werden nun vier Kugeln nacheinander mit Zurücklegen entnommen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 3 mehr als einmal und weniger als viermal auftritt.

c) Es wird aus der Urne solange ohne Zurücklegen gezogen bis das erste Mal eine Kugel mit der Ziffer 6 erscheint. Es die Zufallsvariable X die Anzahl der Ziehungen. Berechne E(X)!
(Lösung: a) $p(E_1) = 33{,}33\%$ $p(E_2) = 40\%$ b) $P(1 < X < 4) = 34{,}02\%$ c) $E(X) = 1{,}57$)

2)
Eine Abfüllmaschine füllt erfahrungsgemäß 15% der Dosen schlecht ab. Man prüft 20 Dosen.

a) Wie viele schlecht abgefüllte Dosen sind zu erwarten? Berechne die Streuung!

b) Tatsächlich wurden 5 schlecht abgefüllte Dosen gezählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man eine so starke (oder noch stärkere) Abweichung vom erwarteten Wert?

c) Wie viele Dosen muss man untersuchen, damit die Wahrscheinlichkeit, wenigstens eine schlecht abgefüllte zu finden, mehr als 90% beträgt?

(Lösung: a) $\mu = 3$; $\sigma = 1{,}60$ b) 0,346 c) mindestens 15 Dosen)

3)
Bei einem Test werden vier Fragen gestellt, wobei für jede Frage 3 Antworten angeboten werden (genau eine davon ist richtig). Bei mindestens zwei richtigen Antworten wird der Test positiv bewertet. Der Kandidat wählt auf gut Glück, denn er kann keine Frage beantworten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er den Test besteht?
(Lösung: 0,407)

4)
Nach K. Landsteiner (1868 – 1943) unterscheidet man vier Blutgruppen 0, A, B und AB, die in Mitteleuropa die folgende Verteilung haben:

X	0	A	B	AB
p(X)	0,38	0,42	0,13	0,07

a) In einem kleinen Dorf in Oberösterreich (z.B. Atzbach) spenden 20 Leute Blut. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten: Unter den Spendern haben:
i) mindestens 3 die Blutgruppe A,
ii) weniger als 3 die Blutgruppe B,
iii) mehr als 13 und höchstens 15 die Blutgruppe 0.

b) Wie viele Personen müssten in diesem Ort Blut spenden, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine Person die seltene Gruppe AB haben?

(Lösung: a) i) 99,79% ii) 50,80% iii) 0,36% b) mindestens 42)

5)
Ein Abnehmer einer bestimmten Ware prüft 32 Warenstücke. Üblicherweise sind 95% der produzierten Warenstücke in Ordnung.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) mehr als 30 Warenstücke in Ordnung sind?

b) genau 30 Warenstücke in Ordnung sind?

c) höchstens 31 Warenstücke in Ordnung sind?

(Lösung: a) 0,52 b) 0,2662 c) 0,8063)

6)
In einer Urne befinden sich **6 weiße**, **4 gelbe** und **4 grüne** Kugeln.

a) Es wird **3 mal mit Zurücklegen** gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
i) eine weiße, eine gelbe und eine grüne Kugel gezogen werden?
ii) keine grüne Kugel gezogen wird?

b) Es wird **3 mal ohne Zurücklegen** gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
i) mindestens eine weiße und mindestens eine gelbe Kugel gezogen wird.
ii) zwei weiße und eine rote Kugel gezogen werden.

7)
Zwei Schachspieler, von denen der eine den anderen erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 schlägt, beschließen 5 Spiele zu spielen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der bessere Spieler genau 3 Spiele?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der bessere Spieler mehr als die Hälfte der Spiele?
c) Wie viele Partien müssten die beiden spielen, damit die Wahrscheinlichkeit für den schlechteren Spieler mindestens einmal zu gewinnen 95% übersteigt?

8)
Eine Urne enthält 5 rote, 4 blaue und 3 weiße Kugeln.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn dreimal hintereinander ohne Zurücklegen gezogen wird, dass

a) mindestens ein blaue Kugel
b) höchstens zwei weiße Kugeln zu ziehen?

9)
In einer Urne befinden sich 2 rote, 3 blaue und 4 grüne Kugeln. Es wird jeweils ohne Zurücklegen gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) bei 2 Ziehungen nur blaue Kugeln
b) bei 2 Ziehungen keine rote Kugel
c) bei 3 Ziehungen mindestens eine grüne Kugel
d) bei 4 Ziehungen höchstens eine blaue Kugel
e) bei 3 Ziehungen alle Kugel mit unterschiedlicher Farbe
f) bei 4 Ziehungen nur blaue Kugeln
g) bei 4 Ziehungen keine grüne Kugel
gezogen werden/wird.

10)
In einer Klasse findet ein großer Vokabeltest statt. Peter entscheidet sich zu folgender Lernstrategie: 40% aller Vokabeln perfekt zu lernen (den Rest schaut er sich überhaupt nicht an)

a) Der Professor fragt 5 willkürlich herausgegriffene Vokabeln ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter
i) genau 3 Vokabeln
ii) mindestens 3 Vokabeln
iii) höchstens 1 Vokabel kann.

b) Wie viele Vokabeln müsste der Professor abfragen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass Peter **mindestens eines** weiß **97% übersteigt**?

11)
Bei einer Bank werden elektronische Schlösser mit einer Ausfallswahrscheinlichkeit von 10% eingebaut.
Zur Kontrolle entnimmt die Firma einer großen Fertigungsserie 25 Schlösser.

a) Berechne den Erwartungswert der für die Anzahl der ausfallenden Schlösser und gib an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Schlösser um höchstens 1 vom Erwartungswert abweicht.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
E_1: mindestens 23 Schlösser sind funktionstüchtig.
E_2: höchstens 2 der entnommenen Schlössen fallen aus

(Lösung: a) $E = 2,5$ 0,4924 b) $p(E_1) = 0,5371$ $p(E_2) = 0,4629$)

12)
In einer Großstadt sind erfahrungsgemäß 12% der Fahrgäste in der U-Bahn und 7% der Fahrgäste in den Bussen Schwarzfahrer. In den beiden Verkehrsmittel wird ein Fahrgast mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 kontrolliert.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
E_1: Ein beliebiger Fahrgast in der U-Bahn wird kontrolliert und ist Schwarzfahrer.
E_2: Unter 20 Fahrgästen der U-Bahn und 25 Fahrgästen der Busse befindet sich kein Schwarzfahrer.
E_3: Unter zwei Personen, von denen einer mit der U-Bahn, die andere mit dem Bus fährt, ist höchstens ein Schwarzfahrer.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in der U-Bahn unter 60 kontrollierten Personen mehr als vier Schwarzfahrer?

c) Ein Kontrollor überprüft täglich etwa 150 Fahrgäste in der U-Bahn und 200 in den Bussen.
Wie viele Schwarzfahrer wird er im Mittel antreffen?
Wie viele Fahrgäste muss ein Kontrollor in der U-Bahn überprüfen, um mit mehr als 80% Wahrscheinlichkeit mindestens einen Schwarzfahrer zu erwischen?

(Lösung: a) $p(E_1) = 0,012$; $p(E_2) = 0,0126$; $p(E_3) = 0,9916$ b) $P(X>4) = 0,8612$;
$P(X<130) = 0,0384$ c) $\mu = 32$ Schwarzfahrer; mindestens 13 Fahrgäste)

13)
Nach dem Märchen vom Froschkönig“
Der König ging mit seiner Tochter zu **drei Brunnen** und sprach zu ihr: „Im **ersten Brunnen** befinden sich **6 Frösche**, **im zweiten 7** und im **dritten sind 8 Frösche**. In **jedem** der **Brunnen** ist **genau ein** verzauberter Prinz. Du darfst aus jedem Brunnen **genau einen Frosch nehmen** und küssen. Befindet sich **mindestens ein Prinz** unter den Fröschen, so bleibt dir meine Strafe erspart.“
Die Prinzessin überlegte kurz und machte folgenden Gegenvorschlag: „Können wir nicht alle Frösche in einen gemeinsamen Brunnen werfen, und ich suche dann **drei Frösche (ohne Zurückwerfen)** aus?“
Wie kommt die Prinzessin eher zum Prinzen? (Erfolg ist mindestens ein Prinz!)
Berechne die beiden Wahrscheinlichkeiten! (Vorschlag König bzw. Vorschlag Prinzessin).