

# Wiederholung Differential- und Integralrechnung

1)

Gegeben ist die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1-x}{x^2}$

Diskutiere die Funktion im Intervall  $[-3; 6,5]$ .

[Lösung: a)  $N(1 | 0)$ ; Asymptoten:  $a_1: x = 0, a_2: y = 0$ ;  $T(2 | -1/4)$ ;  $W(3 | -0,2)$  ]

2)

Über einer gegebenen Hypotenuse  $c$  ist ein rechtwinkliges Dreieck von größtem Inhalt zu errichten. Wie groß ist dieser

[Lösung:  $A = \frac{c^2}{4}$  ]

3) Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}$

a) Bestimme die Funktionsgleichung jener Polynomfunktion  $g(x)$  zweiten Grades, die den Graph von  $f$  in seinen Wendepunkten berührt.

b) Berechne den Inhalt des vom Graphen  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$  und den beiden Wendetangenten von  $f(x)$  begrenzte Flächenstück!

4) Der Graph der Funktion  $f$  verläuft durch den Punkt  $N(0 | 0)$  und hat an der Stelle  $x = 4$  einen Wendepunkt mit der Wendetangente:  $w_t: y = 3x - 8$

a) Zeige, dass es sich um die Funktion  $f(x) = \frac{1}{8}(-x^3 + 12x^2 - 24x)$  handelt.

b) Diskutiere die Funktion im Intervall.

c) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das von der Kurve, der Wendetangente und der  $y$ -Achse eingeschlossen wird.

5) Der Graph der Funktion  $f: y = x^3 + ax^2 + bx + c$  geht durch den Punkt  $P(2|3)$  und hat in  $T(1|-1)$  einen Tiefpunkt.

Der Graph der Funktion  $g: y = px^2 + qx + r$  berührt den Graphen von  $f$  im Wendepunkt von  $f$ . Der Scheitel von  $g$  liegt an der Stelle  $x = -1$ .

a) Berechne die Funktionsterme der beiden Funktionen  $f$  und  $g$ !

b) Diskutiere  $f$  und  $g$ !

c) Berechne den Inhalt des von  $f$  und  $g$  eingeschlossenen Flächenstücks!

[ $f: y = x^3 - 3x + 1$        $g: y = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$        $A = \frac{27}{64} FE$  ]

- 6) Man lege durch den Punkt  $P(-1, y_P)$  der Parabel  $y = -x^2 + 4$  die Tangente  $t$ .
- Stellen Sie die Gleichung der Tangente auf und zeichnen Sie den Graphen samt Tangente.
  - Berechnen Sie den Inhalt des durch  $t$ ,  $x$ -Achse und die Parabel begrenzten Flächenstücks.
  - Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, das durch Drehung dieses Flächenstücks um die  $x$ -Achse entsteht.
  - Durch welchen Punkt der Parabel geht die Tangente, die normal auf  $t$  steht und wie lautet die Gleichung? (Hilfslösung: Gleichung der Tangente  $t: y = 2x + 5$ )
- [b)  $\frac{7}{12} FE$       c)  $\frac{29}{30} \pi VE$       d)  $n(x) = \frac{65}{16} - 2x$ ]
- 7) a) Bestimme eine Polynomfunktion 3. Grades derart, dass der Graph durch den Punkt  $N(0 | 0)$  verläuft und im Punkt  $W(4 | y)$  die Wendetangente  $w_t: y = 3x - 8$  besitzt.
- b) Diskutiere die Funktion  $f$ !
- c) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das von der Kurve, der Wendetangente und der  $y$ -Achse eingeschlossen wird.
- [Lösung: a)  $f(x) = \frac{1}{8}(-x^3 + 12x^2 - 24x)$     b)  $N_1(0 | 0); N_2(9,46 | 0); T(1,17 | -1,66);$   
 $H(6,83 | 9,66) W(4 | 4)$       c)  $8 FE$ ]
- 8) a) Bestimme jene Parabel  $f: y = ax^2 + c$ , die durch den Ursprung und den Punkt  $P(5 | 6,25)$  geht!
- b) Bestimme die Funktion 3. Grades  $g$ , die die Parabel  $f$  im Ursprung berührt und ihr Maximum in  $P(5 | 6,25)$  hat.
- c) Berechne die Fläche, die von den Kurven  $f$  und  $g$  eingeschlossen wird.
- d) Bestimme das Volumen jenes Drehkörpers, der durch Rotation der Parabel  $f$  um die  $y$ -Achse zwischen den Grenzen  $0$  und  $4$  entsteht.
- 9) Der Graph einer Funktion 3. Grades hat in  $E(3 | -4)$  einen Extremwert und in  $W(2 | -2)$  einen Wendepunkt.
- Bestimme die Funktionsgleichung.
  - Berechne die Nullstellen, Extremwerte und den Wendepunkt!
  - Skizziere den Graphen!
  - Berechne den Inhalt der Fläche zwischen der Kurve und der Geraden  $y = x - 4$ !
  - Die Gerade  $y = x - 4$  rotiert zwischen den  $y$ -Grenzen  $0$  und  $-4$  um die  $y$ -Achse und beschreibt so einen Drehkegel. Berechne das Rotationsvolumen mit Hilfe der Integralrechnung.