

# Analysis

Kurvendiskussionen, Integralrechnung alles quer durch

## 1. Zur Diskussion steht...

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3(x-5) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 8x + \frac{5}{2}$ .

- Wo befinden sich die Nullstellen, die Terrassen- und die Wendepunkte des Funktionsgraphen?
- Es ist zu zeigen, dass der Punkt  $P(4 | -13.5)$  ein Tiefpunkt von  $f(x)$  ist.

## 2. Kurveneigenschaften

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 2x^3 - x^5$ .

- Wie sieht der Graph der Kurve aus? (Skizze)
- Wo steigt und wo fällt die Kurve?
- Wo steigt und wo fällt die erste Ableitung der Kurve?
- Hoch-, Tief-, Wende- und Terrassenpunkte?

## 3. gebrochen-rationale Funktion light

Gegeben ist die Funktion  $f(x)$ , sowie ihre beiden Ableitungen  $f'(x)$  und  $f''(x)$ .

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad f'(x) = \frac{(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \quad f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Gesucht sind alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte der Funktion.

## 4. Kurve untersuchen

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$ . Es sind die Hoch- und Tiefpunkte, sowie die Wende- und Terrassenpunkte der Funktion rechnerisch zu bestimmen.

## 5. Gewohnte Fläche

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ . Welche Fläche schliesst der Graph von  $f(x)$  mit der x-Achse ein? Die Nullstellen sind durch Probieren zu finden und anschliessend zu beweisen.

## 6. Eingeschlossene Fläche

Gegeben sind die beiden Funktionen  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$  und  $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ . Gesucht ist die von  $f(x)$  und  $g(x)$  eingeschlossene Fläche A.

## 7. Flächenberechnung

Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = 2x - x^3$$

Wie gross ist die (gesamte) Fläche, die die beiden Funktionen miteinander einschliessen?

## 8. schneiden und berühren

Gegeben sind die beiden Kurven  $f(x) = 4 - x^2$  und  $g(x) = -x^3 + 2x^2$ .

- Es ist zu zeigen, dass sich die beiden Kurven bei  $x = -1$  schneiden und bei  $x = 2$  berühren.
- Welchen Flächeninhalt hat das von  $f(x)$  und  $g(x)$  umschlossene Flächenstück?

## 9. Schnittpunkt im Wendepunkt

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$ .

- Berechne den Wendepunkt W der Funktion  $f(x)$ .
- Durch den Wendepunkt W und den Punkt  $P(4 | 4)$  wird eine Parabel 2. Ordnung  $g(x)$  so gelegt, dass sie die gegebene Funktion  $f(x)$  im Wendepunkt W rechtwinklig schneidet. Wie lautet die Funktionsgleichung von  $g(x)$ ?
- Welche Fläche schliessen die beiden Kurven im ersten Quadranten ein?

10. **Kubische Polynomfunktion**

Eine Polynomfunktion 3. Grades hat bei  $x = 4$  eine Nullstelle und bei  $P(2 | 1)$  einen Terrassenpunkt. Welche Fläche schliesst die Funktion mit den positiven Koordinatenachsen ein?

11. **Rotationskörper**

Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = 2\sqrt{x} \quad g(x) = \sqrt{5-x}$$

Die Fläche die diese Kurven zusammen mit der x-Achse einschliessen rotiert um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

12. **Volumen einer Zwiebel**

Eine Zwiebel kann durch Rotation der Kurve  $y = (5-x) \cdot \sqrt{x}$  um die x-Achse dargestellt werden. Wie gross ist das 'Zwiebelvolumen'?

# Lösung zu: Analysis

## 1. Zur Diskussion steht...

- (a) Nullstellen bei  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 5$   
Kann aus der faktorisierten Funktionsgleichung abgelesen werden.  
Wendepunkt  $W(3 | -8)$   
Terrassenpunkt  $T(1 | 0)$
- (b) Zu zeigen ist, dass  $f(4) = -13.5$ ;  $f'(4) = 0$  und  $f''(4) > 0$  ist.

## 2. Kurveneigenschaften

- (a) –
- (b) Nullstellen der ersten Ableitung  $x_1 = 0$   $x_{2,3} = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ .  
 $f(x)$  ist fallend links von  $x_3$  und rechts von  $x_2$ .  
 $f(x)$  ist steigend zwischen  $x_2$  und  $x_3$ .  
Bemerkung:  $x_1$  ist ein Terrassenpunkt
- (c) Nullstellen der zweiten Ableitung  $x_1=0$ ;  $x_{2,3} = -\sqrt{\frac{6}{10}}$ .  
steigend -  $x_3$  - fallend -  $x_1$  - steigend -  $x_2$  - fallend
- (d) Tiefpunkt  $T(-1.09 | -1.05)$ ; Hochpunkt  $H(1.09 | 1.05)$   
Wendepunkte:  $W_1(-0.774 | -0.65)$   $W_2(0.774 | 0.65)$   
Terrassenpunkt:  $TER(0 | 0)$

## 3. gebrochen-rationale Funktion light

$$H(1 | 0.5)$$
$$T(-1 | -0.5)$$

$$W_1(-\sqrt{3} | -\frac{\sqrt{3}}{4}) \quad W_2(0 | 0) \quad W_2(\sqrt{3} | \frac{\sqrt{3}}{4})$$

## 4. Kurve untersuchen

$$\text{Hochpunkt: } H(-1.095 | 2.051)$$
$$\text{Tiefpunkt: } T(1.095 | -0.0516)$$
$$\text{Wendepunkt: } 1 \quad W_1(-0.7745 | 1.65)$$
$$\text{Wendepunkt: } 1 \quad W_2(0.7745 | 0.35)$$
$$\text{Terrassenpunkt: } TP(0 | 1)$$

## 5. Gewohnte Fläche

$$\int_{-1}^2 x^3 - 3x^2 + 4 dx = \frac{27}{4}$$

## 6. Eingeschlossene Fläche

$$\int_2^7 -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 7 dx = \frac{125}{12}$$

## 7. Flächenberechnung

$$A = \frac{37}{12}$$
$$\int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] dx - \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx$$

## 8. schneiden und berühren

- (a)  $f(-1)=g(-1)=3$ ;  $f(2)=g(2)=0$  und  $f'(2)=g'(2)=-4$
- (b) Beide Flächen sind 18.

### 9. Schnittpunkt im Wendepunkt

(a)  $W(0 | 2)$

(b)  $f(x) = -\frac{1}{24}x^2 + \frac{2}{3}x + 2$ ; mit den Bedingungen  $f(4) = 4$ ;  $f(0) = 2$  und  $f'(0) = \frac{2}{3}$

(c)  $A = \frac{76}{9}$ ; relevante Schnittpunkte bei  $x = 0$  und  $x = 4$

### 10. Kubische Polynomfunktion

$$A = 4$$

$$y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

### 11. Rotationskörper

$$V = \pi \cdot \int_0^1 4x \, dx + \pi \cdot \int_1^5 (5-x) \, dx = 10\pi \approx 31.142$$

### 12. Volumen einer Zwiebel

$$V = \pi \cdot \int_0^5 [(5-x) \cdot \sqrt{x}]^2 \, dx \approx 163.62$$