

Matrizen

101

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = (7 \quad -2 \quad 8) \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $B \cdot A$ $(-2 \quad 46 \quad 49)$

b) $C \cdot D$ $\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 16 & 61 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$

c) $D^T \cdot C$ $\begin{pmatrix} 13 & 10 & -4 \\ 33 & 64 & -11 \end{pmatrix}$

d) $3A + 2C$ $\begin{pmatrix} 16 & 12 & 7 \\ 6 & 29 & 14 \\ -6 & 11 & 17 \end{pmatrix}$

e) C^{-1} $\begin{pmatrix} 0,21 & -0,02 & 0,18 \\ -0,05 & 0,09 & 0,12 \\ 0,05 & -0,09 & 0,88 \end{pmatrix}$

f) $B \cdot C$ $(29 \quad -12 \quad 5)$

g) A^{-1} $\begin{pmatrix} 0,083 & 0,306 & -0,417 \\ 0,333 & -0,444 & 0,333 \\ -0,166 & 0,389 & -0,166 \end{pmatrix}$

Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen:

h) $A \cdot X = C$ $\begin{pmatrix} 1,33 & 2,64 & -1,11 \\ 0,333 & -4,11 & 0,88 \\ 0,33 & 3,72 & -0,78 \end{pmatrix}$

i) $X \cdot A = C$ $\begin{pmatrix} 0,583 & 1,139 & -1,917 \\ 3,917 & -4,306 & 2,427 \\ 0,167 & -0,056 & 0,166 \end{pmatrix}$

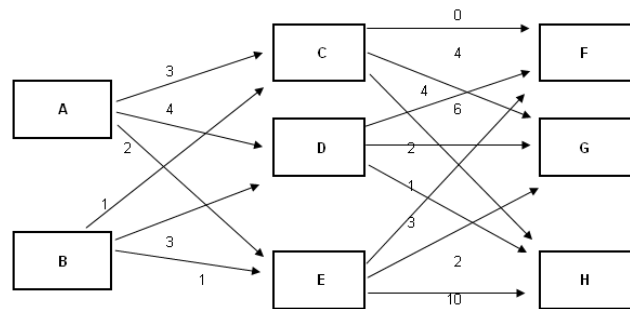
j) $X \cdot C = A$ $\begin{pmatrix} 0,37 & 0,05 & 3,47 \\ 0,16 & -0,26 & 5,63 \\ -0,32 & -0,14 & 4,40 \end{pmatrix}$

102

Ermitteln Sie für folgenden Gozintograph die Transfermatrizen:

Wie viele Rohstoffeinheiten von A und B werden benötigt. Wieviele Rohstoffe benötigen die Endprodukte F, G und H.

Was ändert sich, wenn H nicht mehr erzeugt wird?



L: 90 und 50, 51 36 53, 54 und 33, 51 und 36

103

Die Wanderbewegungen einer Tierart in und aus drei Biotopen laufen so:

Aus A wandern 70 % aller Tiere nach B und 10 % nach C (20 % bleiben)

Aus B wandern 10 % aller Tieren nach A und 60 % nach C

Aus C wandern 80 % nach A und 20 % nach B.

Stellen Sie einen Gozintograph für die Wanderbewegung auf.

Wie ist die Population nach 2 Wanderungen, wenn die Anfangspopulation in A 2000 Tiere, in B 3000 Tiere und in C 8000 Tiere war? (3410, 6540, 3050)

Wie war die Anfangspopulation, wenn bei gleicher Wandermatrix nach einem Jahr der Bestand 3.800, 5.200 und 4.000 Individuen war? (4.000, 6.000, 3.000)

104

Berechnen Sie:

$$a) \begin{pmatrix} -6 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -24 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 29 & 6 & 11 & 27 \\ 12 & 3 & 6 & 10 \\ 7 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 10 & 3 & 7 \\ -8 & 8 & -6 & 14 \\ 0 & -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

105

Ermittle die inverse Matrix zu

$$a) \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -45 & -12,5 & 7 \\ -6 & -1,5 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -6 \\ 3 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

106

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie: $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$

$$\begin{pmatrix} 18 & -31 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$$

107

Berechnen Sie: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$

$$\begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$$

108

Berechnen Sie die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & -1,25 & -0,75 \end{pmatrix}$$

109

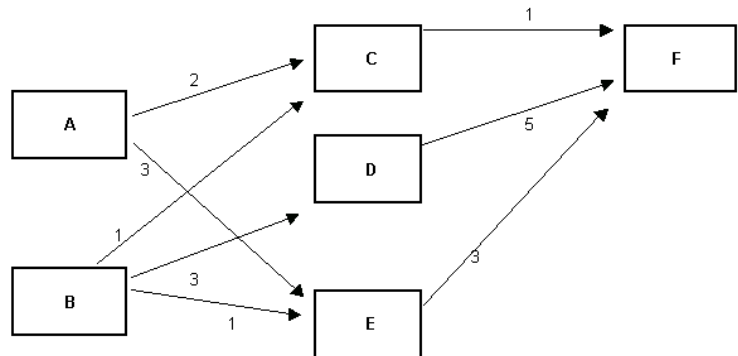
Ein zweistufiger Produktionsvorgang erzeugt aus 2 Grundstoffen A und B über die Zwischenprodukte C, D und E das Endprodukt F. Der Gozintograph sieht so aus:

Geben Sie die Transformationsmatrizen für diesen Vorgang an.

Wie lautet die gemeinsame Transformationsmatrix?

Wieviele Einheiten von A und B werden für die Produktion von F gebraucht?

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 19 \end{pmatrix} \quad 11 \text{ von A und } 19 \text{ von B}$$



110

Die Wanderbewegungen von 3 Biotopen laufen so ab:
 in jedem Jahr wandern 30 % von A nach B, 10 % nach C.
 Von B wandern 40 % der Individuen nach C, 0% nach A
 von C wandern 20 % nach A und 40 % nach B.

Die Anfangsbestände lauten:

A 10.000 B 20.000 C 4.000

Wie hoch sind die Bestände nach 2 Jahren?

$$(6.200 \quad 16.240 \quad 11.560)$$

111

Berechnen Sie folgende Matrizen ohne Computerunterstützung:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 32 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

112

Lösen Sie dieses Beispiel mit CAS – Unterstützung. Schreiben Sie aber Zwischenresultate und Rechengänge an.

- a) Aus 3 Rohstoffen R1, R2 und R3 sollen über 2 Zwischenprodukte Z1 und Z2 schließlich 3 Endprodukte E1, E2 und E3 entstehen. Für Z1 braucht man 4 Einheiten von R1, 3 Einheiten von R2 und 0 von R3. Für Z2 braucht man 8 Einheiten von R1, 2 von R2 und 3 von R3. Die Input-Output-Matrix für den Zusammenhang zwischen den Zwischen- und Endprodukten ist: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie einen Gozintograph für diese Situation. Berechnen Sie die Input-Output-Matrix für den Gesamtvorgang. Wie viele Rohstoffeinheiten braucht man, wenn man 10 Einheiten von E1, 5 von E2 und 20 von E3 erzeugen will?

$$\begin{pmatrix} 8 & 20 & 44 \\ 6 & 11 & 13 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix} \quad 1060, 375, 315$$

b) Lösen Sie folgende Matrixgleichung: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 7 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} -14 & 16 \\ 16 & 21 \\ 11 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

113 Invertieren Sie die folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & -0,3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -0,2 & -0,4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0,4 & 1,2 & -0,5 \\ 0,4 & -0,2 & 0 \\ 0,2 & -0,6 & 0,5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & -0,75 & 0,5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,25 & 0,1 & 0,45 \\ 0 & -0,2 & -0,4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

114

Gegeben sind die Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie:

1. $(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 8 & 21 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 5 \\ -8 & 21 & 7 \end{pmatrix}$

2. $4C \cdot A = (76 \ 8 \ 12)$

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,1 & 0,3 \\ -0,3 & -0,7 & 1,9 \\ 0,5 & 0,5 & -1,5 \end{pmatrix}$

4. $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

115

Gegeben sind die Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie:

1. $(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 37 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 4 & 37 & 15 \end{pmatrix}$

2. $2C \cdot A = (38 \ 4 \ -24)$

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & -1,8 \\ -0,2 & -0,6 & 1,6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

4. $D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

116

Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen zuerst allgemein und dann mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $AX + B = C$ $\begin{pmatrix} 0,5 & 5 \\ 0,5 & -2 \end{pmatrix}$

b) $XB - 3C = A$ $\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

c) $(X + 3A)B = C$ $\begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 1,5 & -8,5 \end{pmatrix}$

Trigonometrie

Teil 1: Dreiecke und Vermessungsaufgaben

101

Berechnen Sie alle fehlenden Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Werten: $c = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 35^\circ 18'$. 5,78 8,16

102

Wie groß ist die Seite c eines allgemeinen Dreiecks, wenn $b = 8 \text{ cm}$, $a = 10 \text{ cm}$ und $\gamma = 57^\circ 18' 30''$ ist? 8,81 cm

103

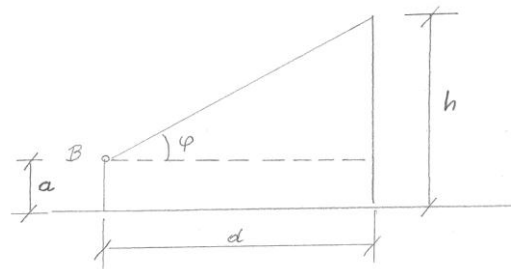
In einem allgemeinen Dreieck kennt man die Winkel $\alpha = 48^\circ 45'$ und $\gamma = 102^\circ 36'$ und die Seite $a = 8 \text{ cm}$. Berechnen Sie den fehlenden Winkel und die restlichen Seiten.
($\beta = 28,65^\circ$, $c = 10,38 \text{ cm}$ $b = 5,10 \text{ cm}$)

104

Eine $3,5 \text{ m}$ lange Leiter wird an eine Mauer gelehnt und reicht dort bis $2,8 \text{ m}$ hoch. Wie groß ist der Neigungswinkel, den die Leiter mit der waagrechten Bodenfläche bildet? 53°

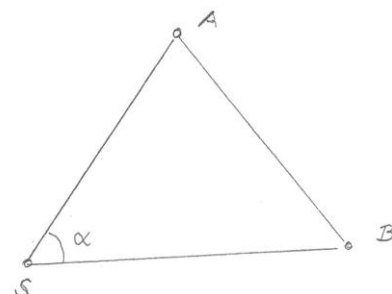
105

Vom Beobachtungspunkt B (in einer Höhe $a = 1,80 \text{ m}$ über dem Boden) wird ein Gebäude mit einem Höhenwinkel von $\varphi = 15^\circ$ anvisiert. Das Gebäude ist $d = 320 \text{ m}$ entfernt. Berechnen Sie die Höhe des Gebäudes. ($87,54 \text{ m}$)



106

Die direkt nicht erreichbare Strecke AB soll vermessen werden. Dazu misst man:
Winkel $\alpha = 22^\circ 48' 55''$
Strecke $SB = 850 \text{ m}$
Strecke $SA = 730 \text{ m}$
Wie lang ist AB? (334 m)



108

a236

Eine Seilbahn überwindet mit einem 1.350 m langen Seil eine Höhe von 735 m. Wie groß ist der Neigungswinkel des Seils zur Horizontalen? (Der Durchhang des Seils bleibt unberücksichtigt.) 33°

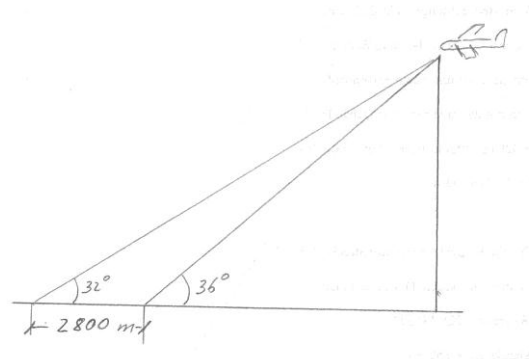
109

a237

Eine Straße hat auf einer 4 km langen Strecke gegen die Horizontale einen Neigungswinkel von $\alpha = 3^\circ 47' 53''$. Um wieviel Meter liegt der Endpunkt der Straße höher als der Ausgangspunkt? 265 m

110

Ein Flugzeug erscheint von zwei 2.800 m voneinander entfernten Beobachtungsplätzen (auf der gleichen Seite) unter den Winkeln 32° und 36° . Wie hoch ist das Flugzeug? 12.503



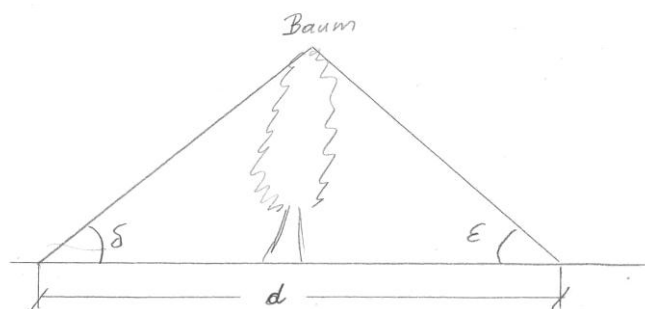
111

Ein Kirchturmkreuz erscheint einem Beobachter, der in einer horizontalen Entfernung von 350 m steht, unter einem Sehwinkel von $24'$. Wie hoch ist das Kreuz, wenn der Kirchturm 20 m hoch ist? 2,45

112

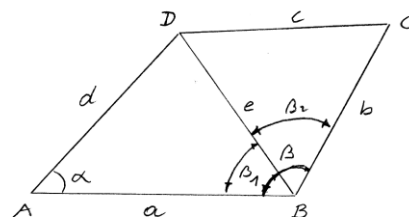
Ein Baum wird von zwei auf gegenüberliegenden Seiten unter den Winkeln $\delta = 35^\circ$ und $\varepsilon = 28^\circ$ gesehen. Die beiden Beobachtungspunkte sind $d = 58$ m voneinander entfernt. Wie hoch ist der Baum und wie weit sind die Beobachtungspunkte vom Fußpunkt des Baumes entfernt?

(17,53 m 25,03 m und 32,97 m)



113

Von einem viereckigen Grundstück ABCD kennt man die Winkel $\alpha = 50^\circ$ und $\beta = 110^\circ$ und die Seiten $a = 100$ m, $b = 90$ m und $d = 80$ m. Berechnen Sie die Länge der fehlenden Seite c und die Länge der Diagonale $BD = e$. $e = 78,2$ m $82,7$ m = c



Teil 2: Periodische Vorgänge

201 w10

Der Zu- bzw. Abfluss $Z(t)$ in ein Becken verläuft sinusförmig mit einer Periode von 40 h und einem Maximum von 10 l/h bei $t=4$ und einem Minimum von -8 l/h (Abfluss).

a) Berechnen Sie die Gleichung der Zuflussfunktion!

b) Die Zuflussfunktion für diesen Punkt sei $Z(t)=1+10\sin(0,2t+1)$:

Berechnen Sie die Periode und die Amplitude dieser Schwingung.

$$1 + 9 \sin\left(\frac{\pi(t+6)}{20}\right) \quad 31,4 \text{ h} \quad 10 \text{ l/h}$$

202 w32

Geben Sie die Funktionsgleichung für folgende Angaben an:

Sinusförmige Schwankung zwischen 300 und 400 °C, das Maximum tritt bei $x=7$ und das Minimum bei $x=23$ auf. $170 + 130 \sin(0,196t+0,196)$

203 w64

Ermitteln Sie die Gleichung einer Sinusfunktion mit folgenden Eigenschaften:

Schwankung zwischen 240 und -40 , Maximum bei $x=35$, nächstes Minimum bei $x=61$

$$100 + 140 \sin\left(\frac{\pi(x-22)}{26}\right)$$

204 w65

Der Zufluss in ein Becken schwankt sinusförmig mit $Z(t) = 40 + 20 \sin\left(\frac{\pi(t-7)}{10}\right)$.

Skizzieren Sie die Funktion. Ermitteln Sie den Zeitpunkt des ersten positiven Minimums und des ersten Maximums. Wie hoch sind Minimum und Maximum? $(2/20)$ und $(12/60)$

205 w67

Ermitteln Sie die Gleichung einer Sinusfunktion mit folgenden Eigenschaften:

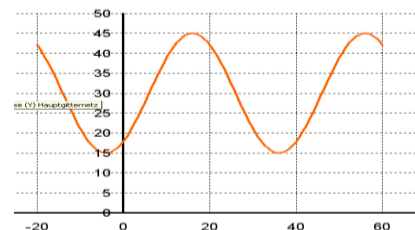
Schwankung zwischen 260 und -20 , Maximum bei $x = 15$, nächstes Minimum bei $x = 41$

$$120 + 140 \sin\left(\frac{\pi(x-2)}{26}\right)$$

206 w68

Der Zufluss in ein Becken schwankt sinusförmig mit

$$30 + 15 \sin\left(\frac{\pi(t+6)}{20}\right) \quad \text{Skizzieren Sie die Funktion.}$$



207 w76

Der Zufluss $Z(t)$ in ein Staubecken verläuft sinusförmig mit einer Periode von 24 h zwischen 0 und 50 hl/min! t in min., $Z(t)$ in hl/min. Das erste Maximum tritt bei $t=4$ h auf!

Berechnen Sie die Gleichung von $Z(t)$! $25 + 25 \sin\left(\frac{\pi(t+2)}{12}\right)$

208 w95

Die Synthese eines Produktes verläuft sinusförmig mit der Periode 24 h zwischen den Extremwerten 50 l/h und 300 l/h, wobei zum Zeitpunkt 0 das Minimum vorliegt! Geben Sie die

Funktionsgleichung für $P(t)$ an! $175 + 125 \sin\left(\frac{\pi(t-6)}{12}\right)$

Exponentialfunktionen – Folgen und Reihen

Teil 1: Exponentialfunktion

101

Rechnen Sie die Funktion $y = 4000 \cdot 0,2^x$ auf die Basis e um! $(4000 \cdot e^{-1,6094x})$

102

Rechnen Sie die Gleichung $y = 250 \cdot 0,7^{-1,2x}$ in eine Gleichung mit der Basis e um. Wie lange ist das Verdopplungsintervall und wie groß ist die relative Änderungsrate in einem x -Intervall?

$y = 250 \cdot e^{0,428x}$ Verdopplungsintervall: 1,62 Zuwachsrate 53,4 %

103

a) Rechnen Sie die Funktion $y = 4 \cdot 1,5^t$ in Exponentialfunktionen mit der Basis e und 10 um!
 $4 \cdot e^{0,405t}$ $4 \cdot 10^{0,177t}$

b) Wie hoch ist die Verdopplungszeit für folgende Exponentialfunktion: $y = 3 \cdot e^{1,05t}$?
 0,66 t-Einheiten

105

Berechnen Sie die Parameter einer Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ mit $f(-2) = 78,91$ und $f(4) = 5.262$. ($a = 320$, $b = 0,7$)

106

Beim mechanischen Ausspülen von Mineralwasserflaschen bemerkt man, daß sich der Schmutzanteil alle 32 Sekunden halbiert.

Berechnen Sie die Gleichung des Schmutzanteils $S(t)$ in einer Flasche, wenn $S(0)=100$ ist und t in Minuten angegeben werden soll. Verwenden Sie die Basis e . Wie lange muß eine Flasche gespült werden, damit der Schmutzanteil unter 5 sinkt. (Angabe in Sekunden.) 138 s

107

Die Algendichte in einem eutrophiertem Gewässer betrug am 15. April 400 mg/l und wächst exponentiell.

Am 1. Mai betrug die Dichte 700 mg/l.

a. Wie hoch ist die Wachstumsrate pro Tag und pro Woche? 3,6 % 27,7 %

b. Wie hoch ist die Verdopplungszeit? 20 d

c. Wann wird die kritische Dichte von 5.000 mg/l überschritten? 26. Juni

108

a) Stellen Sie die Funktion $y = 23 \cdot 1,4^x$ als Exponentialfunktion mit der Basis e dar!

b) In einem Nahrungsmittel vermehren sich Keime mit $K(t) = 250 \cdot e^{0,4t}$ (K in Keime pro kg, t in Stunden nach Montag, 9:00 Uhr). Ab einer Keimzahl von 5000 Keime pro kg gilt das Nahrungsmittel als verdorben. Wie lange hält sich das Nahrungsmittel ungekühlt? Um 12:00 Uhr wird das Nahrungsmittel gekühlt. Dabei verringert sich die Vermehrungsrate auf 2 % pro Stunde. Wie lange hält sich das Nahrungsmittel gekühlt? (ca 16:30, Freitag, 6:41)

111

Computer-Emailviren vermehren sich im Netz exponentiell: Wie lange dauert es, bis die Anzahl der infizierten Systeme 30.000.000 beträgt, wenn sich die Anzahl der infizierten Systeme im Schnitt alle 4 Stunden verfünffacht? 42,8 Stunden

113

a) UV – Licht wird in Glas exponentiell geschwächt. Eine Glasschicht von 3 mm verringert den UV - Anteil um 80 %. Welcher Anteil UV – Licht ist nach 5 mm Glas noch vorhanden? 6,8 %

- b) Wie dick muss das Glas sein, damit nur mehr 1 % des ursprünglichen UV – Anteils vorhanden sind? 8,58 mm

114

Radioaktive Strahlung schwächt sich in jeweils 20 cm Beton auf die Hälfte der Intensität ab. Ermitteln Sie die Gleichung für die Intensität mit der Basis e . $I(x)$ soll in Prozent angegeben sein (d.h. Anfangswert 100) und x in cm. Wie groß ist die Schutzwirkung von 7 cm Beton? **78 %**

115

Schädlinge vermehren sich nach der Funktion $S(t) = 200 \cdot e^{0,15t}$, wobei t in Tagen angegeben ist. Wie hoch ist die Vermehrungsrate dieser Schädlinge pro Tag und Woche und wie groß ist die Verdopplungszeit?

16 % pro Tag 186 % pro Woche t = 4,6 Tage

117

Ein Nahrungsmittel wird um 9⁰⁰ gekauft und weist eine Keimdichte von 2.000 Keimen pro kg auf. Die Anzahl der Keime verdoppelt sich alle 2 h. Bei einer Keimdichte von 30.000 Keimen pro kg gilt es als verdorben.

- a) Stellen Sie die Gleichung der Anzahl der Keime, abh. von der Zeit mit 9:00 ... $t = 0$ und 10:00 ... $t = 1$ auf. Wann ist das Nahrungsmittel verdorben?
 b) Um 13:30 wird das Nahrungsmittel in den Kühlschrank gelegt und der Kühlschrank reduziert die Vermehrungsrate auf ein Viertel des alten Wertes. Wann ist das Nahrungsmittel verdorben?
 16:49 1:09 nächster Tag

Teil 2: Folgen und Reihen

201

Eine Schulklasse produziert im Unterricht Plakate, welche im Klassenraum in irgendeiner Weise deponiert werden müssen.

In der 5. Schulwoche wurden 2 Plakate , in der 11. Woche wurden schon 10 gefertigt.

Verwenden Sie für die folgenden Berechnungen ein exponentielles Modell.

- a) Wie groß ist die Wachstumsrate für die erstellten Plakate pro Woche?
 b) Wie groß ist die Verdopplungszeit?
 c) Wieviele Plakate werden in der 30. Woche angefertigt?
 d) Unter Ausnützung aller technischen Möglichkeiten haben in der Klasse 600 Plakate Platz (schon lange vor diesem Katastrophentermin steigt der Mathematiklehrer auf Unmengen dieser Plakate herum!). Wann ist die Klasse voll?

(Handlung und Personen sind frei erfunden. Jede Ähnlichkeit mit lebenden Personen ist zufällig!)

30,8 2,6 1635 in der 21. Woche

202

Wann ist eine Mülldeponie mit der Kapazität von 500.000 m³ per Ende 1998 voll, wenn die jährlich anfallende Müllmenge im Jahr 2002 20.000 m³/a betrug und man mit einer gleichbleibenden Wachstumsrate der Jahresmüllmenge von 8 % rechnet? (2015)

203

Ein trapezförmiger Platz soll mit 800.000 Steinen belegt werden. Jede Reihe hat um 260 Steine mehr als die vorige. Wieviele Steine hat die erste Reihe, wenn man mindestens 38 Reihen belegen will. Wieviele Steine bleiben über? (16.242 24)

204

Eine Kaufhauskette versucht durch eine Verkaufsaktion zusätzliche Kunden zu gewinnen. Am ersten Tag kommen 23.500 Neukunden zusätzlich. Im Schnitt nimmt jedoch die Neukundenzahl um 450 pro Tag ab.

- Wieviele Neukunden können bei einer Laufzeit von 60 Tagen insgesamt gewonnen werden?
- Wie lange hat die Aktion überhaupt Sinn, d.h. wann kommen durch diese Aktion keine neuen Kunden mehr?
- Wie lange ist die Aktion durchzuführen, damit man auf eine Gesamtzahl von 400.000 Neukunden kommt?

613.500 53 Tage 21 Tage

205

In einer Gemeinde mussten folgende Müllmengen deponiert werden.

2005 20.000 t/a

2012 70.000 t/a

Verwenden Sie für die folgenden Berechnungen ein exponentielles Modell:

- Wie groß ist die jährliche Zuwachsrate der Jahresmüllmenge und wie groß ist die Verdopplungszeit?
- Wann übersteigt die Jahresmüllmenge die 200.000 t/a–Grenze.
- Wie lange kann deponiert werden, wenn die kommunale Mülldeponie ein Fassungsvermögen von 2 Mio. t per Ende 2007 hatte?

19,6 % 3,9 Jahre im Jahr 2018 2022

206

Eine Mülldeponie mit dem Fassungsvermögen $4.000.000 \text{ m}^3$ wird seit Ende 1963 betrieben.

Die Müllmengen betragen: im Jahr 1964: $4.000 \text{ m}^3/\text{a}$

im Jahr 1985: $12.000 \text{ m}^3/\text{a}$

Verwenden Sie ein lineares Modell!

- Wie groß ist der absolute Zuwachs an Müll pro Jahr?
- Wie groß ist die relative Zuwachsrate (bezogen auf das Vorjahr) im Jahr 1965 und im Jahr 1984?
- Wann ist die Deponie voll (Jahreszahl!)?
- Wann ist die Deponie voll, wenn man ab dem Jahr, in dem 80 % der Deponie voll sind, den jährlich anfallenden Müllberg konstant hält?

$381 \text{ m}^3/\text{a}^2$ 9,5 % und 3,4 % 2099 2100

207

- Sie sollen in wenigen Tagen 2.100 Vokabeln lernen. Jeden Tag wollen Sie um 20 Vokabeln weniger als am Vortag lernen. Wieviele Vokabeln müssen Sie am ersten Tag lernen, wenn Sie nur 10 Tage Zeit haben.
- Wieviele Vokabeln können Sie lernen, wenn Sie am ersten Tag 450 und jeden Tag um 13 weniger lernen und das 30 Tage lang?
- Wie lange hat es Sinn zu lernen, wenn Sie am ersten Tag 450 und jeden Tag um 13 weniger lernen, d.h. wann würden Sie weniger als 0 Vokabeln lernen? 300 7845 35,6

208

In einem Fußballstadion sollen Sitzplätze errichtet werden. In jeder Reihe sind um 24 Plätze mehr als in der Reihe vorher. Insgesamt sind mindestens 24.000 Plätze zu errichten. Wie viele Plätze müssen in der ersten Reihe gebaut werden, damit man mit 40 Reihen auskommt? 132

209

Wie lange dauert es, bis eine Mülldeponie mit dem Fassungsvermögen von 450.000 m^3 per Ende 1993 voll ist, wenn im Jahr 1991 $15.000 \text{ m}^3/\text{a}$ deponiert wurden und die Wachstumsrate der Jahresdeponiemengen 8 % beträgt? 13,9

210

Eine Dachfläche soll mit Ziegeln belegt werden. In der ersten Reihe liegen 470 Ziegel. Aufgrund der Schräge liegen in jeder weiteren Reihe um 15 Ziegel weniger. Wieviele Reihen kann man mit 5.000 Ziegeln belegen. Wieviele Ziegel braucht man tatsächlich, wenn man mit der letzten kompletten Reihe aufhört? (13 Reihen, 4.940)

211

Wie groß ist die Summe aller geraden Zahlen zwischen 10 und 2.000 (incl.)? (1.000.980)

212

Aschenbrödel schüttet in der Küche Reis aus (was weiß ich, warum !?!?). Es sind ca. 80.000 Körner. Die Vögel helfen Aschenbrödel beim Aufklauben. Sie lernen schnell und können in jeder Minute doppelt so viele Körner aufklauben als vorher. Wie lange brauchen sie, um alle Körner einzusammeln, wenn sie mit einem Korn anfangen? 16,3 Minuten

213

Eine Mülldeponie hat ein Fassungsvermögen von 100.000 ME per Ende 2000. Wie lange kommt man mit der Deponie aus, wenn die Jahresmüllmenge im Jahr 1998 1.500 ME/a war und die Jahresmüllmenge sich mit 28 % pro Jahr vermehrt? **(2010)**

214

- a) Ein Datenträger hat eine Kapazität von 30.000 MB per Ende der 8. Kalenderwoche (KW). Die anfallende Datenmenge in der 12. KW betrug 2.800 MB/Woche, in der 15. KW schon 3.700 MB/Woche. Verwenden Sie ein lineares Modell. Wie hoch ist die konstante Zunahme der Datenmenge pro Woche und wann ist der Datenträger voll? 18. KW
- b) Wie groß ist die Gesamtdatenmenge von der 10. KW bis incl. der 20. KW, wenn man annimmt, dass in der 5. KW die Wochendatenmenge 800 MB war und dass der Zuwachs der Datenmenge/Woche 75 MB/w^2 ist. 17.050

215

- a) Ein Mülldeponie hat ein Fassungsvermögen von $80.000.000 \text{ m}^3$ per Ende 2000. Die Jahresmüllmenge im Jahr 1998 betrug $1.240.000 \text{ m}^3/\text{a}$ und steigt jedes Jahr um 12 %. Wie lange kann man diese Deponie noch verwenden? 2017
- b) Die Jahresmüllmengen im Jahr 2000 war 1,5 Mio. t und im Jahr 1990 0,7 Mio. t. Wie hoch ist die jährlich gleichbleibende Zuwachsrate und wie hoch ist die Verdopplungszeit der Jahresmüllmengen?
7,9 % 9,1 Jahre

216

Der Vorrat eines Rohstoffes betrug per Ende 1990 80.000 ME (Mengeneinheiten). Im Jahr 1999 wurden 9.800 ME/a verbraucht.

- a) Wann ist der Vorrat erschöpft, wenn man eine gleichbleibende Wachstumsrate von 12% für den Jahresverbrauch annimmt? 2001
- b) Wann ist die Deponie erschöpft, wenn man einen gleichbleibenden absoluten Zuwachs von 1.000 ME/a^2 ansetzt. 2002

217

- a) Ein Platz wird mit Steinen belegt. Er ist trapezförmig und jede Reihe hat um 80 Steine mehr als die vorherige. Wieviele Steine braucht man für 120 Reihen, wenn die erste Reihe 450 Steine hat? 625.200
- b) Wieviele Reihen kann man mit 80.000 Steinen belegen. Ermitteln Sie eine ganzzahlige Lösung. Wieviele Steine bleiben über? 39 Reihen 3170 Steine

218

Ein Brunnen soll gebohrt werden. Der erste Meter kostet € 150,- und jeder weitere Meter kostet um € 35,- mehr als der vorherige. Wie tief kann ein Brunnen mit einem Budget von € 2.800,- gebohrt werden? Wie teuer ist der Brunnen tatsächlich, wenn nur ganze Meter verrechnet werden können (angefangene Meter zählen als gebohrt) (9 Meter, € 2.610,-)

FINANZMATHEMATIK

Teil 1: Zinseszinsen

101

Eine Schuld von € 50.000,-- per Ende 2004 wird durch folgende Raten getilgt:
 € 20.000,-- per Ende 2006
 € 20.000,-- per Ende 2009
 und durch 2 gleiche Raten (per Ende 2011 und Ende 2012). Wie hoch sind diese Raten bei einer Verzinsung von 4 % dek. gj.
 Erstellen Sie einen Tilgungsplan für diese Situation! (10.110,19)

102

f255

Wie hoch ist die Effektivverzinsung (auf Zehntelprozent genau) für folgende Ratenzahlung:

Kaufpreis	EUR	25.600,--		
Anzahlung sofort	EUR	5.600,--		
und Raten von	EUR	10.000,--	1 Jahr nach Kaufdatum	
	EUR	12.700,--	2 Jahre nach Kaufdatum	8,5 %

103

f256

Die jährlichen relativen Finanzierungskosten eines Kredites betragen 5,5 %. Wie hoch ist die letzte Rate, wenn eine Schuld von EUR 250.000,-- per Ende 2005 durch folgende Raten getilgt wird:

EUR	150.000,--	per Ende 2007		
EUR	80.000,--	per Ende 2009		
Rest		per Ende 2011?		102.500,--

105

f258

Wie lange muß ein Kapital von EUR 260.000,-- mit 5,5 % gebunden bleiben, damit ein Endbetrag von EUR 500.000,-- entsteht?
 12,2 Jahre

107

f260

- a) Susi Müller zahlt per Ende Juni 2006 EUR 30.000,-- und per Ende 2007 EUR 50.000,-- auf ein mit 5,5 % dek. p.a. verzinstes Konto. In welchem Monat kann Susi EUR 100.000,-- von diesem Konto beheben?
im August 2011
- b) Eine Bank bietet ein „Kapitalsparbuch“ an: Man kauft es um EUR 5.000,-- und erhält nach 6 Jahren einen Betrag von EUR 6.511,30. Wie hoch ist die Effektivverzinsung auf Zehntelprozent genau? **4,5 %**
- c) Erstellen Sie einen Tilgungsplan für einen Kredit über EUR 200.000,-- (per Ende 2006).
 Verzinsung 7 % dek. p.a.
 Tilgung durch EUR 100.000,-- per Ende 2007, Rest per Ende 2009.

109

f272

- a) Eine Schuld von EUR 800.000,-- per Ende 2000 soll durch Raten von EUR 300.000,-- per Ende Mai 2003, EUR 500.000,-- per Ende 2004 und eine dritte per Ende März 2006 getilgt werden. Wie hoch ist diese dritte Rate bei einem Zinssatz von 8 % nom. p.a. dek. bei quartalsmäßiger Verzinsung? (285.010)
- b) Vervollständigen Sie den folgenden Tilgungsplan (Verzinsung 8 % dek. gj.):

Termin	Rate	Zinsen	Kapitaländ.	Restschuld
0	0	0	0	5.000
1	3.000,--			
2	1.300,--			
3				0

(Zinsen: 400 192 103,36 KÄ: -2600 -1108 -1292)

110

f273

- a) Wie hoch sind die relativen jährlichen Finanzierungskosten für ein Darlehen von EUR 30.000,--, wenn es mit 80 Quartalsraten von EUR 820,-- nachschüssig (1. Rate ein Quartal nach der Darlehenszuteilung) getilgt wird. (5,9 %)
- b) Kristina Brezl zahlt auf ein mit 6 % dek. gj. verzinstes Konto den Betrag von EUR 3.500,-- per Ende 2001 und EUR 5.800,-- per Ende 2003 ein. In welchem Monat kann Kristina EUR 15.000,-- abheben? (Juni 2011)
- c) Der berühmte Fondsmanager D. Mabungo treibt den Kurs des von ihm verwalteten Fonds in 5 Jahren von 3.520,-- auf 8.340,--. Wie hoch ist der Effektivzinssatz, der so eine Wertsteigerung ergäbe? (18,8 %)

111

f290

Erstellen Sie einen Tilgungsplan für folgende Situation: Schuld von EUR 50.000,-- per Ende 2001. Verzinsung 6 % dek. p.a.. Annuitäten von EUR 30.000 per Ende 2003 und EUR 10.000 per Ende 2004. Tilgungsende soll Ende 2005 sein. Wie hoch ist die Restrate per Ende 2005?
(letzte Zeile: 2005 18.815,85 1.065,05 0 0)

112

f292

Wann ist ein Kapital von EUR 8.000,-- bei einem Zinssatz von 5 % antizipativ ganzjährig fällig, wenn Ende 2002 EUR 3.000,-- und Ende 2003 EUR 4.000 eingezahlt wurden? März 06

113

f302

- a) Vervollständigen Sie den folgenden Tilgungsplan (Zinssatz 6 % gj. dek.):

Nr	Termin	Annuität	Zinsen	Kapitaländerung	Restschuld
0	31.12.2003				20.000,00
1	31.12.2004	10.000,00			
2	31.12.2005	10.000,00			
3	31.12.2006	0,00			
4	31.12.2007				

Schuldreste: 20.000 11.200 1.872 1.984,32 0

- b) Wie hoch ist die Effektivverzinsung für folgendes Ratengeschäft:
Statt des Barverkaufspreises von € 15.000,-- will Susi Radko lieber folgende Raten zahlen:
€ 10.000 nach 18 Monaten
€ 6.000 nach 36 Monaten. 3,2 %
- c) Susis (die vom Beispiel b)) Oma Amalie hat für Susi ein Sparkonto eröffnet und schon folgende Beträge eingezahlt: € 5.000,-- per Ende Juni 2002 (Zeugnis), € 8.000 per Ende Dezember 2004 (Weihnach-

ten). Susi möchte sich eine Zahnbürste um € 20.000,-- kaufen. Wie lange muss Susi warten, wenn das Konto mit 3 % gj. antizipativ verzinst ist? Februar 2018

114

f254

Jemand zahlt auf ein mit 6 % nom. p.a. dek. vierteljährlich verzinstes Konto folgende Beträge ein:

Ende Mai 2007 EUR 50.000,--
Ende August 2009 EUR 100.000,--.

Wie hoch ist der Kontostand per Ende 2010?

170.158,57

120

f122

Eine Schuld von EUR 300.000 per Ende 2008 soll durch folgende

Raten getilgt werden:

EUR 100.000,- per Ende 2010
EUR 100.000,- per Ende 2014
Rest per Ende 2016

- 1) Wie groß ist der Rest bei einem Zinssatz von $i=12\%$?
- 2) Wie groß sind die jährlichen relativen Finanzierungskosten?
- 3) Wie groß ist der verrechnete Zinssatz, wenn der Rest 200.000,- beträgt? (Zehntelprozent)
- 4) Wann ist ein Betrag von EUR 200.000,- bei $i=12\%$ fällig? (419.966,68 13,3 % 5,0% Juni 10)

Teil 2:

Ganzjährige Renten

201

f270

- a) Eine Schuld von EUR 50.000,-- (per Ende 2001) wird durch 15 Jahresraten (1. Rate per Ende 2005) bei einem Zinssatz von 6 % dek. gj. getilgt. Wie hoch sind die Raten? (6.131,51)
- b) Eine Schuld von EUR 50.000,-- (per Ende 2001) wird durch Raten von EUR 5.500,-- (1. Rate per Ende 2005) bei einem Zinssatz von 6 % dek. gj. getilgt. Wie viele Raten und welche Teilrate ein Jahr nach der letzten Vollrate sind dazu nötig? (17 VR 5.497,09)

202

f271

f271

- a) Eine Schuld von EUR 50.000,-- (per Ende 2001) wird durch 10 Raten von EUR 7.500,-- (1. Rate per Ende 2005) getilgt. Wie hoch ist der Effektivzinssatz des Kredites? (5 %)
- b) Zur Tilgung eines Darlehens von EUR 50.000,-- (per Ende 2001) zahlt der Schuldner 4 Jahresraten von EUR 6.000,-- (1. Rate per Ende 2005) bei einem Zinssatz von 6 % dek. gj.. Ende 2008 verringert die Bank den Zinssatz auf 5 % dek. gj.. Wie hoch müssen die restlichen 6 Raten sein? (9.640,82)

203

f274

- a) Eine Schuld von EUR 50.000,-- (per Ende 2001) wird durch 10 Jahresraten (1. Rate per Ende 2005) bei einem Zinssatz von 6 % dek. gj. getilgt. Wie hoch sind die Raten? (8.091,05)
- b) Eine Schuld von EUR 50.000,-- (per Ende 2001) wird durch Raten von EUR 7.500,-- (1. Rate per Ende 2005) bei einem Zinssatz von 6 % dek. gj. getilgt. Wie viele Raten und welche Teilrate (gleichzeitig mit der letzten Vollrate) sind dazu nötig? (11 757,9)

204

f275

Eine Schuld von EUR 50.000,-- (per Ende 2001) wird durch 12 Raten von EUR 7.500,-- (1. Rate per Ende 2005) getilgt. Wie hoch ist der Effektivzinssatz des Kredites? (6,7 %)

205

f280

- a) Eine Schuld von EUR 30.000,-- per Ende 2002 soll durch 15 Jahresraten (1. Rate per Ende 2005) bei einem Zinssatz von 6 % dek. p.a. getilgt werden. Wie hoch sind diese Raten? 3.470,67
- b) Eine Schuld von EUR 50.000,-- per Ende 2003 wird durch 20 Jahresraten (1. Rate per Ende 2004) von EUR 4.500,-- getilgt. Wie hoch ist der Effektivzinssatz dieser Tilgung? 6,4 %

206 f282

- a) Wie viele Jahresraten von EUR 500,-- (1. Rate per Ende 2002) sind zur Tilgung einer Schuld von EUR 4.700,-- (per Ende Juni 2002) bei einer Verzinsung von 8 % p.a. dek. erforderlich? Wie hoch ist die Teilrate (fällig mit der letzten Vollrate). 16 331,95
- b) Eine Schuld von EUR 30.000,-- (Ende 2003) wird vorerst durch 6 Jahresraten von EUR 1.500,-- (1. Rate per Ende 2004) bei $i = 7\%$ getilgt. Ende 2009 senkt die Bank den Zinssatz auf 5 % gj. dek. Wie hoch sind die restlichen 10 Raten (1. neue Rate per Ende 2010)? 4.440,97

207 f303

Eine Schuld von € 8.000,-- per Ende September 2003 soll durch 25 Jahresraten (1. Rate per Ende 2007) getilgt werden. Wie hoch sind diese Raten bei einem Zinssatz von 5 % dek. gj.? 665,15

208 f304

Wie viele Vollraten von € 3.000,-- (1. Rate per Ende 2005) und welche Teilrate (gleichzeitig mit der letzten Vollrate) sind zur Tilgung einer Schuld von € 20.000,-- (per Ende 2002) bei einem Zinssatz von 4 % dek. gj. erforderlich? 8 VR + 1.962,21

209 f305

Eine Schuld von € 10.000,-- per Ende 2005 wird bei einem Zinssatz von 6 % gj. dek. durch Jahresraten von € 1.600,-- (1. Rate per Ende 2006) getilgt. Ende 2010 senkt die Bank den Zinssatz auf 4 % gj. dek.. Wie hoch sind die neuen Raten (1. neue Rate per Ende 2011), wenn die Schuld mit der letzten Rate per Ende 2020 getilgt sein soll? 537,91

210 f306

Die relativen jährlichen Finanzierungskosten für einen Kredit werden mit 5 % angegeben.
Kredit per Ende 2004
16 Jahresraten zu € 1.000,-- , 1. Rate per Ende 2008
Wie hoch ist der Effektivzinssatz des Kredits? 6,3 %

211 f215

Eine Schuld von EUR 20.000,-- per Ende 2010 soll durch 10 ganzjährige Annuitäten (1. Rate per Ende 2015) bei $i = 10\%$ getilgt werden.

- a) Wie hoch sind die Raten? 4.765,51
- b) Wie hoch sind die neuen Raten, wenn die Bank den Zinssatz per Ende 2019 auf 8 % senkt? (Erste neue Rate per Ende 2020) 4.524,51

212 f235 L

Wie hoch ist Ihr Guthaben Ende 2020, wenn Sie ab Ende 2013 (1. Rate) EUR 10.000,-- 5 Jahresraten auf ein mit 7 % verzinstes Konto einzahlen? 70.449,03

213 f237 L

Wie groß ist die Effektivverzinsung einer Schuldtilgung, wenn für einen Schuldbetrag von EUR 300.000,-- 15 vorschüssige (d.h. die erste Rate ist mit dem Kredit fällig) Jahresraten von EUR 40.000,-- fällig werden? Berechnen Sie die Effektivverzinsung auf Zehntelprozent genau! 12,4 %

214 f238 L

Eine Schuld von EUR 450.000,-- per Ende 2014 soll durch ganzjährige Raten von EUR 65.000,-- (1. Rate per Ende 2017) getilgt werden. Wie viele Vollraten und welche Teilrate ein Jahr nach der letzten Vollrate sind dafür erforderlich, wenn der Zinssatz 8 % ganzj. dek. beträgt? 13 32.704,36

216

f61

Eine Schuld von EUR 350.000,- per Ende 2005 soll durch 20 Raten (1. Rate Ende 2008) getilgt werden.

- a) Wie hoch sind die Raten bei $i = 12\%$? (58.778,14)
 b) Wie groß sind die neuen Raten, wenn Ende 2010 der Zinssatz auf $i = 8\%$ verringert wird.
 Die erste neue Rate soll Ende 2011 gezahlt werden! (45.877,63)

217

f65

Jemand hat Anspruch auf eine 10-jährige Rente: 1. Rate Ende 2005 EUR 40.000,- und auf eine Einmalzahlung von EUR 200.000,- per Ende 2019. Er möchte dafür eine Rente mit: 1. Rate Ende 2010 letzte Rate Ende 2030. Wie hoch sind die neuen Raten bei Verzinsung mit $i = 6\%$?

Lösung: 42.983,16

218

f75

Eine Schuld von EUR 350.000,- soll durch 15 nachschüssige ganzjährige Raten getilgt werden. ($i=13\%$)

- a) Wie groß ist die Rate?
 b) Der Schuldner setzt im 4.,5.,6. und 7. Jahr mit der Tilgung aus. Durch welche Erhöhung der restlichen Raten wird die Schuld trotzdem rechtzeitig getilgt?
 c) Wie lange dauert die Tilgung der Schuld, wenn man die Raten auf EUR 90.000,- erhöht und die Teilrate mit der letzten Vollrate bezahlt?

L: 54159,62 108.895,13 Ende des 18. Jahres $T=41.189,82$

219

f110

Eine Schuld von EUR 400.000,- ist durch nachschüssige ganzjährige Annuitäten in 10 Jahren bei $i = 8,5\%$ zu tilgen.

- a) Wie hoch sind die Annuitäten?
 b) Am Ende des 3. Jahres wird der Zinssatz auf $i = 12\%$ geändert. Wie hoch sind die neuen Raten? (Die erste neue Rate ist die vierte!)
 c) Welche Restschuld bliebe am Ende des 10. Jahres, wenn die alten Raten weiterbezahlt würden?
 (60.963,08 68.373,58 74.764,61)

Teil 3:

Unterjährige Renten

301

f263

- a) Eine Schuld von EUR 80.000,- per Ende Juli 2006 wird durch 72 Monatsraten (1. Rate per Ende Jänner 2007) bei einem Zinssatz von 7% dek. nom. p.a. bei vierteljährlicher Verzinsung getilgt. Wie groß sind die Raten? **R = 1.402,33**

- b) Wie groß ist der Effektivzinssatz (Zehntelprozent) für folgende Ratenzahlung:

Barverkaufspreis EUR 25.000,-

Ratenvereinbarung:

Anzahlung sofort..... EUR 5.000,-

Rest durch 10 Quartalsraten von..... EUR 2.180,- (erste Rate ein Quartal nach Kauf)

6,5 %

302

f265

- a) Jemand möchte von einem Vermögen von EUR 2.100.000,- (Ende 2008), verzinst mit $i = 7\%$, beginnend mit Ende Jänner 2009 jedes Monat EUR 28.000,- beheben.

Wie lange kann sie das und wie groß ist der Rest ein Monat nach der letzten Vollabhebung?

97 Raten **24.074,79**

- b) Wieviel darf sie monatlich abheben, wenn sie 50 Jahre, also bis Ende 2058 auskommen will? 12.290,95

303

f266

Jemand hat Anspruch auf folgende Renten:

30 Quartalsraten von EUR 3.000,--, 1. Rate am 1. Juli 2009

120 Monatsraten von EUR 1.000,--, 1. Rate am 1. Oktober 2009

Er möchte stattdessen eine Einmalzahlung von EUR 40.000,-- per Ende Februar 2012 und eine Jahresrente (1. Rate Anfang 2010) durch 10 Jahre.

Wie hoch sind die Jahresraten bei einem Nominalzinssatz von 9 % p.a., wenn die Verzinsung dreimal im Jahr erfolgt? EUR 17.047,59.

304

f276

Eine Schuld von EUR 80.000,-- (per Ende 2001) soll durch 60 Monatsraten (1. Rate per Ende Jänner 2005) bei einem Zinssatz von 1,5 % vierteljährlich getilgt werden. Berechnen Sie die Höhe der Raten! (1.847,85)

305

f277

Wieviele Quartalsraten von EUR 20.000,-- und welche Teilrate, zahlbar mit der letzten Vollrate, sind zur Tilgung einer Schuld von EUR 500.000,-- bei einem Zinssatz von 5 % gj. dek. erforderlich. Die erste Rate ist ein Quartal nach der Schuld fällig. (30 Raten + 845,50)

306

f278

Markus Geduldik will sich eine Wohnung kaufen. Er soll einen Betrag von EUR 40.000,-- per Ende 2001 zahlen. Stattdessen bietet ihm der Verkäufer eine Ratenvereinbarung an: 40 Quartalsraten von EUR 1.500,-- , erste Rate zahlbar per Ende März 2005. Welchen Effektivzinssatz verrechnet der Verkäufer? (5,26 %)

307

f281

a) Mario Kotschi will ein Auto um EUR 26.000,-- kaufen. Der Autoverkäufer H. Akazi bietet ihm eine Ratenvereinbarung an: Anzahlung 20 % und dann 24 Monatsraten von EUR 950,-- (1. Rate ein Monat nach Kaufdatum). Welcher Verzinsung entspricht diese Ratenvereinbarung? 9,4 %

b) Eine Firma kauft eine Lagerhalle und nimmt dafür einen Kredit von EUR 250.000,-- (fällig per Ende 2003). Sie vereinbart 20 Halbjahresraten (1. Rate per Ende Juni 2005) bei einer Verzinsung von 5 % ganzjährig. Wie hoch sind diese Rate und wie hoch sind die Finanzierungskosten? 16.790,16 85.803

308

f283

a) Eine Schuld von EUR 50.000,-- (Ende 2003) wird durch 60 Monatsraten (1. Rate per Ende März 2005) bei einer Verzinsung von 2 % vierteljährlich getilgt. Wie hoch sind die Raten? 1.110,59

b) Fr. Hobel zahlt jedes Monat EUR 500,-- (erstmal Ende Mai 2001) für einen Versicherungsvertrag ein. Sie soll diesen Betrag 10 Jahre lang zahlen. Die Versicherung verspricht Ende 2016 EUR 90.000,-- aus-zuzahlen. Welcher Effektivverzinsung entspricht dieser Vertrag? 3,8

309

f287

a) Eine Schuld von EUR 50.000,-- per Ende 2002 soll durch Halbjahresraten mit einer Laufzeit von 25 Jahren getilgt werden. Die erste Rate ist per Ende Juni 2004 fällig. Wie hoch sind diese Raten bei einer Verzinsung von 8 % p.a. nominell, wenn vierteljährlich verzinst wird? (2.536,65)

b) Wie hoch ist die Effektivverzinsung für folgendes Ratengeschäft: Barverkaufspreis EUR 2.500,--, Anzahlung 20 % des Barverkaufspreises. Ratenzahlung durch 36 Monatsraten von je EUR 63,-- (1. Rate ein Monat nach Kauf) (8,7 %)

310

f294

Eine Schuld von € 8.000,-- per Ende September 2003 soll durch 40 Quartalsraten (1. Rate Ende März 2005) getilgt werden. Wie hoch sind diese Raten bei einem Zinssatz von 6 % gj. dekursiv? (285,91)

311

f295

Herr Huber kauft ein Auto mit dem Barverkaufspreis € 25.000,-- per Ende Mai 2003. Der Autohändler macht ihm ein Teilzahlungsangebot: Anzahlung Ende Mai 2003 mit € 5.000,--. 36 Monatsraten (1. Rate per Ende Juni 2003) von € 600. Welcher Effektivzinssatz wird verrechnet? 5,2 %

- 312 f296
 Wie viele Halbjahresraten von € 800,-- und welche Teilrate ein Semester nach der letzten Vollrate sind zur Tilgung einer Schuld von € 10.000,-- (per Ende 2003) erforderlich. 1. Halbjahresrate per Ende Juni 2004
 Zinssatz: 5 % gj. dek. 15 VR und 107,33
- 313 f297
 Eine Schuld von € 8.000,-- per Ende 2003 soll durch 60 Monatsraten (erstmalig per Ende Jänner 2004) bei einem Zinssatz von 6 % nom.p.a. und halbjähriger Verzinsung getilgt werden. Wie hoch sind die Raten?
 154,39
- 314 f253
 Wie viele Monatsraten (1. Rate per Ende Juni 2009) von EUR 3.000,-- und welche Teilrate ein Monat nach der letzten Vollrate sind zur Tilgung einer Schuld von EUR 50.000,-- (per Ende 2008) bei einem Zinssatz von 8 % gj. dek. erforderlich? **18 Raten TR = 895,84**
- 315 f251
 1. a) Jemand will eine Wohnung um EUR 120.000,-- kaufen. Der Kaufpreis ist Ende 2007 zu bezahlen. Er möchte jedoch nur eine Anzahlung von 40.000,-- leisten und den Rest durch Monatsrate (1. Rate Ende Jänner 2008) über einen Zeitraum von 10 Jahren tilgen. Wie hoch sind diese Raten bei einem Zinssatz von 6,5 % gj. dek.? **R = 900,83**
 b) Jemand zahlt 10 Jahre lang vierteljährlich EUR 2.500 (1. Rate per Ende März 2004) Prämien für eine Versicherung. Die Verzinsung beträgt bis Ende 2009 4,5 % dek. gj. und dann (1. neu verzinste Rate per Ende März 2010) 6 % dek. gj. Wie hoch ist der Auszahlungsbetrag Ende 2013? **130.935,57**
- 316 f249
 a) Wie hoch ist die Effektivverzinsung für folgendes Ratengeschäft:
 Kaufpreis bei Barzahlung EUR 34.000,--
 Ratenvereinbarung:
 Anzahlung sofort: EUR 4.000,--
 48 Monatsraten von EUR 750,-- 1. Rate 5 Monate nach Kaufdatum.
8,2 %
 b) Wie viele Halbjahresraten (1. Rate per Ende Juni 2009) von EUR 2.500,-- und welche Teilrate ein Semester nach der letzten Vollrate sind zur Tilgung einer Schuld von EUR 45.000,-- (per Ende 2008) bei einem Zinssatz von 8 % gj. dek. erforderlich? **31 Raten TR = 2.071,91**
- 317 f247
 a) Eine Schuld von EUR 300.000,-- per Ende Juni 2015 wird durch 50 Halbjahresraten (1. Rate per Ende 2017) bei einem Zinssatz von 7,5 % gj. dek. getilgt. Wie hoch sind diese Raten? **15.269,65**
 b) Nehmen Sie an, die Raten der obigen Schuld hätten EUR 13.000,-- betragen. Ende 2024 erhöht die Bank den Zinssatz auf 4 % halbjährlich dek.. Wie hoch sind die neuen Raten (1. neue Rate per Ende Juni 2025). **R_n = 18.329,14**
- 318 f246
 4. a) Wieviele Monatsraten von 800,-- und welche Teilrate mit der letzten Vollrate sind zur Tilgung einer Schuld von EUR 20.000,-- bei einem Zinssatz von 8 % ganzj. dek. notwendig, wenn die erste Rate ein Monat nach Kreditzuteilung fällig ist? 27 273,79
- 319 f245
 a) Ein Auto mit dem Barverkaufspreis von EUR 25.000,-- soll mit 48 Monatsraten von EUR 645,-- finanziert werden, wobei die erste Rate 3 Monate nach Kaufdatum fällig ist. Berechnen Sie den Effektivzinssatz dieses Kredites auf Zehntelprozent genau. 10,5

Teil 4: Investitionsrechnung

- 401 f254
- a) Berechnen Sie die Rentabilität folgender Investition:
- | | | | | |
|-----------------|------------------------|-----|------------|---------------|
| Kapitaleinsatz: | per Anfang 2008 | EUR | 250.000,-- | |
| Rückflüsse | erstmalig im Jahr 2010 | EUR | 90.000,-- | 10 Jahre lang |
- Rentabilität 20,9 %**
- b) Berechnen Sie den Kapitalwert der folgenden Investition:
- | | | | | |
|---|---------------------|--|--|--|
| Kalkulationszinssatz | 15 % | | | |
| Investitionswert | 2.500.000,-- | per Ende 2005 | | |
| 60 % fremdfinanziert durch einen Kredit, rückzahlbar durch 48 Monatsraten von EUR 35.000,-- (erste Rate per Ende Jänner 2007) | | | | |
| Rückflüsse | monatlich 50.000,-- | durch 10 Jahre, erstmals im Jänner 2008. | | |
- 234.258,32**
- 403 f262
- a) Wie groß ist die Amortisationszeit (statisch und dynamisch) für folgende Investition:
- | | | | | |
|----------------------------|----------------|--|--|-------------------|
| Kapitaleinsatz: | EUR 200.000,-- | | | |
| jährliche Rückflüsse..... | EUR 25.000,-- | | | |
| Kalkulationszinssatz | 10 % | | | 16,9 Jahre |
- b) Wie hoch ist die Rentabilität (Zehntelprozent) der folgenden Investition:
- | | | | | |
|-----------------------------|----------------|--|--|---------------|
| Kapitaleinsatz | EUR 800.000,-- | | | |
| Laufzeit | 20 Jahre | | | |
| Rückflüsse..... | EUR 150.000,-- | jährlich während der gesamten Laufzeit | | |
| Modernisierungskosten | EUR 250.000,-- | am Ende des 8. Jahres | | 16,3 % |
- 406 f284
- a) Eine Investition von EUR 200.000,- wird durch 30 % Eigenmittel und einen Kredit finanziert, dessen jährliche Rückzahlungsraten EUR 50.000 bei einer Laufzeit von 3 Jahren betragen. Die Nettoüberschüsse dieser Investition werden mit:
- im 1. Jahr EUR 50.000,-
 - im 2. Jahr EUR 100.000,-
 - im 3. Jahr EUR 400.000,- und
 - im 4. Jahr EUR 150.000,-
- geschätzt. Wie hoch ist der Kapitalwert bei $i = 20\%$? 249.606
- 407 f285
- Wie groß ist die Amortisationszeit (statisch und dynamisch) für folgende Investition:
- | | | | | |
|----------------------------|----------------|--|--|----------|
| Kapitaleinsatz: | EUR 300.000,-- | | | |
| jährliche Rückflüsse..... | EUR 35.000,-- | | | |
| Kalkulationszinssatz | 10 % | | | 8,6 20,4 |
- 408 f285
- Wie hoch ist die Rentabilität (Zehntelprozent) der folgenden Investition:
- | | | | | |
|-----------------------|---------------|--|--|--------|
| Kapitaleinsatz | EUR 80.000,-- | | | |
| Laufzeit | 20 Jahre | | | |
| Rückflüsse | EUR 15.000,-- | jährlich während der gesamten Laufzeit | | |
| Modernisierungskosten | EUR 25.000,-- | am Ende des 8. Jahres | | 16,3 % |
- 409 f288
- a) Berechnen Sie den Kapitalwert für folgende Investition bei einem Kalkulationszinssatz von 20 %: Kauf einer Anlage zum Preis von EUR 80.000,-- , 70 % fremdfinanziert, Rückzahlung des Kredites durch 20

Halbjahresraten von EUR 3.200,-- (1. Rate 3 Jahre nach dem Investitionszeitpunkt). Nettoüberschüsse von monatlich EUR 1.500,-- während der Laufzeit von 15 Jahren (erstmalig im ersten Monat nach Investitionszeitpunkt). 41.525

- b) Wie groß ist die Gewinnannuität für folgende Investition: Kapitalwert EUR 23.000,-- Nutzungsdauer 13 Jahre, Kalkulationszinssatz 12 %? 3.580,58

411

f298

Eine Investition von € 5.000.000,-- per Ende 2004 wird zu 70 % fremdfinanziert. Man rechnet mit Nettoüberschüssen von monatlich € 40.000,-- ab Jänner 2006. Der Kredit wird mit 40 Quartalsraten von € 100.000,-- ab März 2005 getilgt. Wie hoch ist die Rentabilität dieser Investition bei einer Laufzeit bis Ende 2020? 5,8 %

412

f299

Berechnen Sie die Gewinnannuität für folgende Investition: Kapitaleinsatz per Ende 2003 € 80.000,--. Nettorückflüsse in den Jahren:

2005	€ 18.000,--
2006	€ 20.000,--
2007	€ 30.000,--
2008	€ 45.000,--

Verwenden Sie den Kalkulationszinssatz 8 %. 998,3

416

f252

- a) Berechnen Sie den Kapitalwert der folgenden Investition:

Kapitalbedarf	EUR 8.000.000,--	per Ende 2006
Finanzierung:	Fremdfinanzierung zu	70 %
Fremdfinanzierung durch	20 Semesterraten von	EUR 200.000,--
	1. Rate per	Ende Juni 2007
Nettoüberschüsse:	monatlich	EUR 100.000,--
	während der Laufzeit von	15 Jahren
	erstmalig	im Jänner 2009
Kalkulationszinssatz	12 %	
(KW = 1.855.406)		

- b) Wie lange dauert es, bis sich eine Investition von EUR 40.000,-- bei jährlichen Rückflüssen von EUR 8.000,-- bei einem Kalkulationszinssatz von 14 % amortisiert? **n = 9,2**

417

f248

2. a) Berechnen Sie die Rentabilität der folgenden Investition auf Zehntelprozent genau:

Kapitalbedarf	EUR 2.500.000,--	per Ende 2017
Eigenmittelanteil	35 %	
Fremdfinanzierung durch	20 Quartalsraten von	EUR 100.000,--
	1. Rate per	Ende März 2018
Nettoüberschüsse:	monatlich	EUR 40.000,--
	während der Laufzeit von	15 Jahren
	erstmalig	im Jänner 2019
Rentabilität 17,3 %		

- b) Wie hoch ist die dynamische Amortisationszeit einer Investition von 30 Mio. EUR bei jährlichen Rückflüssen von EUR 5,0 Mio. bei einem Kalkulationszinssatz von 13 %? **n = 12,4**

418

f245

- a) Ein Auto mit dem Barverkaufspreis von EUR 25.000,-- soll mit 48 Monatsraten von EUR 645,-- finanziert werden, wobei die erste Rate 3 Monate nach Kaufdatum fällig ist. Berechnen Sie den Effektivzinssatz dieses Kredites auf Zehntelprozent genau. 10,5

419

f233

- a) Eine Investition von EUR 2.000.000,-- per Anfang 2013 wurde mit 20 % Eigenmittel und einen durch 24 nachschüssige Quartalsraten von EUR 90.000 zu tilgenden Kredit (Tilgung beginnt sofort) finanziert. Berechnen Sie den Kapitalwert dieser Investition bei einem Kalkulationszinssatz von 20 %, wenn mit folgenden Nettoüberschüssen gerechnet werden muß:
- | | | |
|--------------------|----------------|------------|
| im Jahr 2013 | EUR 500.000,-- | |
| im Jahr 2014 | EUR 800.000,-- | |
| im Jahr 2015 | EUR 900.000,-- | |
| im Jahr 2016 | EUR 800.000,-- | |
| im Jahr 2017 | EUR 400.000,-- | |
| im Jahr 2018 | EUR 700.000,-- | 676.854,-- |
- b) Wie groß ist die Rentabilität einer Investition mit einem Kapitaleinsatz von EUR 400.000,-- bei folgenden Rückflüssen:
- | | | |
|------------------|----------------|--------|
| im 1. Jahr | EUR 100.000,-- | |
| im 2. Jahr | EUR 140.000,-- | |
| im 3. Jahr | EUR 200.000,-- | |
| im 4. Jahr | EUR 130.000,-- | 14,8 % |

420

f178 **Errichtung einer Filiale:**

Die Errichtung einer Filiale per Anfang 2012 wird zu 80 % mit einem Kredit von 3 Mio. EUR (rückzahlbar in 40 nachschüssigen Quartalsraten von EUR 125.000,--, 1. Rate Ende März 13) fremdfinanziert.

- a) Berechnen Sie den Effektivzinssatz dieses Kredites auf Zehntelprozent genau! Berechnen Sie auch die relativen jährlichen Finanzierungskosten.
- b) Wie hoch müssen die jährlichen Nettoüberschüsse während der Nutzungsdauer von 20 Jahren sein, damit die Rentabilität dieser Investition 20 % beträgt?
- c) Wie hoch ist die dynamische Amortisationsdauer einer Investition von EUR 50.000,--, wenn die Nettoüberschüsse pro Jahr EUR 9.800,-- bei einem Kalkulationszinssatz von 8 % betragen?
- d) Wieviele nachschüssige Monatsraten von EUR 3.000,-- und welche Teilrate mit der letzten Vollrate sind zur Tilgung einer Schuld von EUR 50.000,-- bei einem Zinssatz von 9,5 % nötig?

L: 9,3% 6,1% 512.747,-- 6,8 Jahre 17 mal 3.000,-- + 2.641,88

421

f228

- a) Eine Firma finanziert die Errichtung einer Filiale mit der Nutzungsdauer von 10 Jahren um EUR 40.000.000,-- mit 25 % Eigenmittel. Sie rechnet mit Nettoüberschüssen von 6,5 Mio. EUR ab dem 2. Jahr incl.. Im ersten Jahr wird mit einem Nettoverlust von 1 Mio. EUR gerechnet. Die Tilgung des Fremdkapitals erfolgt mit 6 Jahresraten zu 4 Mio. EUR. Berechnen Sie den Kapitalwert dieser Investition bei einem Kalkulationszinssatz von 15 %. (962.326,16 EUR)
- b) Berechnen Sie die dynamische Amortisationszeit einer Heizanlage bei einem Zinssatz von 8 %, die bei Herstellungskosten von EUR 50.000,-- jedes Jahr EUR 10.000,-- Heizkosten erspart. (6,6)

423

f200 Investitionsrechnung

- a) Eine Investition von EUR 300.000,- soll durch 20 % Eigenmittel finanziert werden. Die Rückzahlung des Fremdkapitals erfolgt durch 20 Quartalsraten von EUR 20.000,- . Ermitteln Sie die Gewinnannuität bei einer Laufzeit von 10 Jahren und prognostizierten Nettoüberschüssen von EUR 60.000,- pro Jahr und einem Kalkulationszinssatz von 10 %. (880,63)
- b) Wie groß ist die dynamische Amortisationszeit einer Investition von EUR 250.000,- bei Nettoüberschüssen von EUR 40.000,- pro Jahr und einem Kalkulationszinssatz von 10 %? (10,2 Jahre)

424

f197

a. Eine Investition von EUR 500.000,- wird durch 20 % Eigenmittel und einen Kredit finanziert, dessen jährliche Rückzahlungsraten EUR 150.000 bei einer Laufzeit von 4 Jahren betragen.

Die Nettoüberschüsse dieser Investition werden mit:

im 1. Jahr	EUR 350.000,-
im 2. Jahr	EUR 200.000,-
im 3. Jahr	EUR 400.000,- und
im 4. Jahr	EUR 150.000,-

geschätzt. Wie hoch ist der Kapitalwert bei $i = 15\%$? 276.099

b. Wie groß ist die Rentabilität eines Wertpapiers, das um EUR 30.000,- gekauft wird, jedes Jahr Zinsen von EUR 3.000,- bringt und am Ende des 2. Jahres um 32.000,- verkauft wird? 13,1 %

425

f186

Berechnen Sie den internen Zinssatz einer Investition mit dem Kapitaleinsatz von EUR 200.000,- bei Rückflüssen von EUR 150.000,- im dritten Jahr und 400.000,- im 5. Jahr. (26,1 %)

426

f176

Für die Errichtung einer neuen Filiale müssen EUR 8.000.000,- aufgebracht werden. Für die Summe von EUR 6.000.000,- werden Kreditangebote eingeholt.

a) Wie groß sind die Monatsraten eines Kredites von EUR 6.000.000,- (Wertgestellt per 1.1. 2010) mit Laufzeit von 15 Jahren, $i = 9\%$, 1. Rate fällig 1.7.10 (61.788,12)

b) Wie groß ist die Effektivverzinsung (auf 10tel % genau) eines Kredites mit folgenden Bedingungen: Betrag EUR 6.000.000,-, fällig bei 1.1.10, Raten: Jahresraten von EUR 670.000,-, 1. Rate bei 1.1.11, fällig Laufzeit 20 Jahre (9,3 %)

c) Von der neuen Filiale werden während der Nutzungsdauer von 20 Jahren folgende Überschüsse und Ausgaben erwartet:

Kapitaleinsatz per 1.1.10	EUR 2.000.000,-;
Generalüberholung per Ende 2020	EUR 3.000.000,-;
jährl. Nettoüberschüsse.....	EUR 1.500.000,-;
Finanzierungskosten für die ersten 15 Jahre jährlich	EUR 800.000,-;
Wie groß ist der KW und GA bei Kalkulationszinssatz von 10 %?	(3.634.000 426.848)

Differentialquotient - Differenzieren

$$108 \quad \frac{6x^4 - 3x^2 - 4x + 10}{x^2}$$

$$12x + \frac{4}{x^2} - \frac{20}{x^3}$$

$$109 \quad \frac{4x^4 - 3x^2 - 4x + 10}{2x^2}$$

$$\frac{4x^4 + 2x - 10}{x^3}$$

$$110 \quad \frac{6x^3 - 4x^2 + x - 10}{2x}$$

$$6x - 2 + \frac{5}{x^2}$$

$$111 \quad y = 8x^3 - 10x + 5 - \frac{4}{x^2}$$

$$y' = 24x^2 - 10 + \frac{8}{x^3}$$

$$112 \quad y = \frac{8x^4 - 5x^2 + 10x}{2x^2}$$

$$y' = 8x - \frac{5}{x^2}$$

$$113 \quad y = 5x^2 + 6x - 10$$

$$y' = 10x + 6$$

114 $y = \cos(8x^2)$

$y' = -16x \sin(8x^2)$

115 $y = \ln(5-x)$

$y' = \frac{1}{x-5}$

116 $y = \sqrt[4]{x}$

$y' = \frac{1}{4 \sqrt[4]{x^3}}$

117 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$y' = -\frac{1}{3 \sqrt[3]{x^4}}$

118 $y = \sqrt[4]{x^5}$

$y' = \frac{5 \sqrt[4]{x}}{4}$

119 $y = \frac{5}{\sqrt{x^7}}$

$y' = -\frac{35}{2 \sqrt{x^9}}$

123 $y = \sqrt{3x^2+5}$

$y' = \frac{6x}{2 \sqrt{3x^2+5}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+5}}$

124 $\ln(\cos 4x)$

$-\frac{4 \sin 4x}{\cos 4x} = -\tan(4x)$

126 $y = \sin^2 4x$

$y' = 8 \sin 4x \cos 4x$

127 $y = \sqrt{\ln 5x}$

$y' = \frac{1}{2x \sqrt{\ln 5x}}$

128 $y = 5 \sin x - 3^x - \frac{13}{x^3}$

$y' = 5 \cos x - 3^x \ln 3 + \frac{39}{x^4}$

129 3^{3x-3}

$3^{3x-2} \ln 3$

130 $4 \cos(4x) - \frac{8}{x^3}$

$-16 \sin(4x) + \frac{24}{x^4}$

131 $3 \sin^2(3x^2+2)$

$36x \sin(3x^2+2) \cos(3x^2+2)$

132 $\sqrt{5x^3} - (2x-5) + \cos^3(4x^2)$

$\frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3}} - 2 - 24x \cos^2 4x^2 \sin 4x^2$

133 $\sqrt{5x^3} - \ln(2x-5) + \sin(3x^2)$

$\frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3}} - \frac{2}{2x-5} + 6x \cos(3x^2)$

- 134 $\ln(\cos(2x - 1))$ $- 2 \tan(2x - 1)$
- 137 $(6x^2 + 3x + 2)^4$ $(48x + 12)(6x^2 + 3x + 2)^3$
- 138 $\sqrt{\sin(3x)}$ $\frac{3 \cos(3x)}{2 \sqrt{\sin(3x)}}$
- 139 $\ln(8x^2)$ $\frac{2}{x}$
- 140 $\frac{x^3 - 2x + 4}{x^2}$ $\frac{x^3 + 2x - 8}{x^3}$
- 141 $y = 5 \sin(4x)$ $y' = 20 \cos(4x)$
- 142 $y = 5 \sin(3x)$ $y' = 15 \cos(3x)$
- 143 $\cos^2(3x)$ $- 6 \cos(3x) \sin(3x)$
- 144 $(\ln(\sin(3x)))$ $\frac{3 \cos(3x)}{\sin(3x)}$
- 145 $8x + 2$ 8
- 146 $\frac{4}{\sqrt{x}}$ $-\frac{2}{\sqrt{x^3}}$
- 147 $\frac{4x^5 - 5x^2 + 3x + 10}{x^2}$ $\frac{12x^5 - 3x - 20}{x^3}$
- 150 $\ln(\sin(5x))$ $\frac{5}{\tan(5x)}$
- 151 $5 \cos^3(6x)$ $- 90 \cos^2(6x) \cdot \sin(6x)$
- 152 $(3 \sin(x^2))^3$ $162x \sin^2(x^2) \cos(x^2)$
- 153 $\sqrt{\ln(x)}$ $\frac{1}{2x \sqrt{\ln(x)}}$
- 154 $(6x^3 - 2x + 3)^4$ $(6x^3 - 2x + 3)^3 (72x^2 - 8)$
- 155 $\ln(5x^2 - 15)$ $y' = \frac{10x}{5x^2 - 15} = \frac{2x}{x^2 - 3}$
- 156 $\cos(\ln^3 x^3)$ $\frac{-9 \sin(\ln^3 x^3) \ln^2 x^3}{x}$

Teil 2: Produkt – und Quotientenregel

201 $\frac{3x+5}{3-x}$

$\frac{14}{(3-x)^2}$

203 $x^{32} \sin(2-x)$

$x^{31}(32 \sin(2-x) - x \cos(2-x))$

204 $\frac{3x^2+7}{3-x}$

$\frac{-3x^2+18x+7}{(3-x)^2}$

206 $e^{(5x+3)} \cdot \sin x$

$e^{(5x+3)} \cdot (5 \sin x + \cos x)$

207 $\cos x^2$

$-2x \sin x^2$

208 $\frac{x-3}{x+5}$

$\frac{8}{(x+5)^2}$

212 $\frac{5x-3}{6x-2}$

$\frac{8}{(6x-2)^2}$

213 $\ln(\sin^2 3x)$

$\frac{6}{\tan(3x)}$

214 $e^{-3x} \sqrt{3x}$

$3 e^{-3x} \frac{1-6x}{2\sqrt{3x}}$

215 $\frac{3x^2-4}{\cos x}$

$\frac{(3x^2-4) \sin x + 6x \cos x}{\cos^2 x}$

216 $\sin(5x) \cdot e^{3-2x}$

$e^{3-2x} (5 \cos(5x) - 2 \sin(5x))$

219 $\frac{4x^2-5}{8-3x}$

$\frac{-12x^2+64x-15}{(8-3x)^2}$

221 $e^{-2x} (x^2 + 5x + 3)$

$e^{-2x} (-2x^2 - 8x - 1)$

222 $y = (x^3 + 4) \cdot \cos(x)$

$y' = 3x^2 \cos(x) - (x^3 + 4) \sin(x)$

223 $y = \frac{4+7x}{5x+4}$

$\frac{8}{(5x+4)^2}$

224	$y = 5x^3 \sin(2x)$	$y' = 15x^2 \sin(2x) + 10x^3 \cos(2x)$
226	$\ln(5x^2 - 10)$	$\frac{2x}{x^2 - 2}$
227	$y = 2x^3 \sin(5x)$	$y' = 6x^2 \sin(5x) + 10x^3 \cos(5x)$
229	$(2x - 3) e^{0,2x}$	$e^{0,2x} (0,4x + 1,4)$
230	$y = \frac{4x}{5x + 7}$	$\frac{28}{(5x+7)^2}$
231	$(2x - 5) e^{0,2x}$	$e^{0,2x} (0,4x + 1)$
232	$y = \frac{3x}{5x + 7}$	$\frac{21}{(5x+7)^2}$
239	$(2x + 4)^3 \cdot x^2$	$x(2x + 4)^2(10x + 8)$
240	$\frac{3x + 2}{5x - 1}$	$\frac{-13}{(5x - 1)^2}$

Funktionsdiskussion

Teil 1: Stetige Funktionen

- 101 Ermitteln Sie alle Extremwerte der Funktion $y = 5x^4 - 30x^2 + 100$ samt Tangentensteigung!
 $E(0/100);0 \quad E(1,73/55);0 \quad E(-1,73/55);0$
- 102 Ermitteln Sie alle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte von $y = 24x^2 - x^3$.
 $E(0/0) \quad E(16/2.048) \quad W(8/1.024) \quad N(0/0) \text{ und } N(24/0)$
- 103 Berechnen Sie alle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte samt Tangentensteigungen für die Funktion
 $y = x^3 - 12x^2 + 36x$. $W(4/16);-12 \quad E_1(2/32);0 \quad E_2 = {}_1N_2(6/0);0 \quad N_3(0/0)36$
- 104 Zeichnen Sie einen Funktionsgraph mit folgenden speziellen Punkten:
 $W(4/4);-3 \quad E_1(2/10,7);0 \quad E_2 = {}_1N_2(6/0);0 \quad N_3(0/0)12$
- 105 Ermitteln Sie die Extremwerte von $y = e^{0,2x} x$. $E(-5/-1,84);0$
- 106 Ermitteln Sie die Extremwerte von $y = (x - 5)^2 (x + 7)^2$. $E(5/0);0 \quad E(-7/0);0 \quad E(-1/1.296);0$
- 107 Berechnen Sie alle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte samt Tangentensteigungen für die Funktion
 $y = 2x^3 - 24x^2 + 72x$. $W(4/32);-24 \quad E_1(2/64);0 \quad E_2 = {}_1N_2(6/0);0 \quad N_3(0/0);72$

- 109 Ermitteln Sie die Extremwerte von $y = e^{0,1x} x$. **E(-10/ -3,7);0**
- 110 Ermitteln Sie die Extremwerte von $y = (x - 4)^2 (x + 6)^2$. **E(4/0);0 E(-6/0);0 E(-1/625);0**
- 111 Ermitteln Sie alle Nullstellen samt Tangentensteigung von $y = x^2 (x^2 - 8x + 15)!$
 $N_1 (0 / 0); 0 N_2 (3 / 0); -18 N_3 (5 / 0); 50$
- 112 Berechnen Sie alle Extremwerte der Funktion $y = x^2 e^{-0,3x}$. **E₁ (0/0) ;0 E₂ (6,67/6,01);0**
- 113 Ermitteln Sie alle Wendepunkte von $y = x^4 - 294 x^2$ samt Tangentensteigungen! **W(±7 /- 12.005) ; ± 2.744**
- 115 Ermitteln Sie alle Wendepunkte von $y = 2x^3 - 60x^2 + 300$ samt Tangentensteigungen!**W(10 / - 3.700) ; - 600**
- 116 Ermitteln Sie die Extremwerte von $y = 2x^3 - 24 x^2$ samt Tangentensteigungen!
E₁ (0 / 0) ; 0 und E₂ (8 / - 512) ; 0
- 117 **Skizzieren Sie den Funktionsverlauf von $y = (x - 3)^3 (5 - x)^2$.
 Ermitteln Sie dazu die Nullstellen und Extremwerte!** (3/0) (5/0) **E(4,2/1,1)**
- 118 Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $y = x^2 (10 - x) (x + 8)$
- 119 Skizzieren Sie die Funktion $y = x^2(10 - x)(x + 4)$.
 Ermitteln Sie dazu die Nullstellen mit ihrer algebraischen Vielfachheit ohne Tangentensteigungen.
- 120 **Skizzieren Sie die Funktion $y = x(10 - x)^2(x + 4)$.
 Ermitteln Sie dazu die Nullstellen mit ihrer algebraischen Vielfachheit ohne Tangentensteigungen.**
- 121 Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = (10 - x)^3 (x + 3)^2$. Ermitteln Sie dazu nur die Nullstellen (ohne Tangentensteigungen) und stellen Sie den Funktionsgraph fachlich richtig dar

Teil 2: Umgekehrte Funktionsdiskussion

- 201 Die Funktion $y = ax^4 - 300x^2 + cx + d$ hat bei $x = 10$ einen Wendepunkt. Wie groß ist a ? (0,5)
- 202 Welchen Wert hat b in $y = x^2 + bx$, wenn die Funktion an der Stelle -6 einen Extremwert hat? (12)
- 203 Die Funktion $y = 4x^3 - ax^2 + 10$ hat einen Extremwert bei $x = 5$. Ermitteln Sie den Parameter a ! **a = 30**
- 204 Die Funktion $y = 4x^3 - ax^2 + 10$ hat einen Extremwert bei $x = 10$. Ermitteln Sie den Parameter a ! **a = 60**
- 205 Ermitteln Sie die Parameter einer Funktion 2. Grades:
 Sie hat einen Extremwert bei $(4 / 90)$ und geht durch $(0 / 10)$. **a = -5 b = 40 c = 10**
- 206 Ermitteln Sie die Gleichungen der folgenden Funktion:
 Die Funktion $y = ax^4 - 288 x^2 + 5$ hat einen Wendepunkt bei $x = 4$. **a = 3**
- 207 Eine Funktion 3. Grades hat folgende Eigenschaften:
 Wendepunkt bei $W (5 / 200); 20$
 Extremwert bei $x = 10$.
 Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion! **a = -0,2667 b = 4 c = 0 d = 133,333**

- 208 Eine Kurve 4. Ordnung geht durch den Punkt $(2 / 3.000)$ und hat einen Wendepunkt bei $W(5 / 5.000)$. Sie hat eine Doppelnulstelle bei $x = 0$. Berechnen Sie die Parameter der Gleichung dieser Funktion! $(29,7 \quad -391,2 \quad 1.413,6)$
- 209 Eine Funktion 3. Grades hat den Wendepunkt bei $W(0/0)$ und einen Extremwert bei $E(5 / -4.500)$. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung! $(18x^3 - 1350x)$
- 210 Ein Funktionsgraph 2. Ordnung hat einen Extremwert bei $(2 / 80)$ und geht durch den Punkt $(10 / 400)$. Ermitteln Sie seine Funktionsgleichung! $(5x^2 - 20x + 100)$
- 211 Eine algebraische Funktion 4. Grades hat einen Wendepunkt bei $W(1/-15)$, einen Extremwert bei $E(0 / 10)$ und geht durch den Punkt $P(2 / -30)$. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung. $5x^4 - 30x^2 + 10$
- 212 Ermitteln Sie die Gleichungen der folgenden Funktionen:
Eine Funktion 3. Grades hat den Wendepunkt bei $W(-10 / 16.000)$; -2.400 und geht durch $P(0/0)$.
a = 8 b = 240 c = 0
- 213 Ermitteln Sie die Gleichungen der folgenden Funktionen:
Eine Funktion 3. Grades hat den Wendepunkt bei $W(-10 / 8.000)$; -1.200 und geht durch $P(0/0)$.
a = 4 b = 120 c = 0
- 214 Eine Funktion 3. Grades hat folgende Eigenschaften: Doppelnulstelle an der Stelle 0, Wendepunkt bei $W(5 / -6.250)$. Berechnen Sie die Gleichung dieser Funktion! **a = 25 b = -375**

Teil 3: Unstetige Funktionen

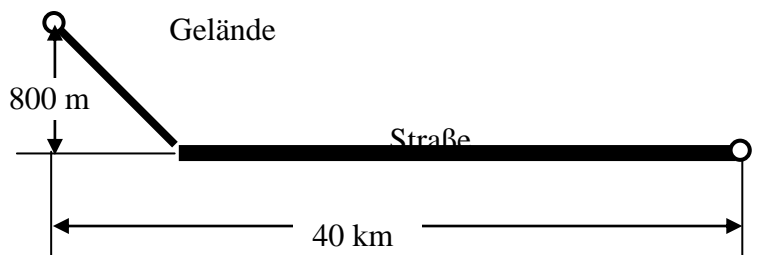
- 301 Ermitteln Sie alle Pole von $y = \frac{3x^2}{x^2 + 2x - 15}$. $(3 \text{ und } -5)$
- 302 Ermitteln Sie die Asymptote von $y = \frac{5x^2}{x + 4}$. $(5x - 20)$
- 303 Ermitteln Sie die Nullstellen von $y = \frac{x^2(15 - 3x)}{x + 10}$ $(0/0)$ u. $(5/0)$
- 304 Berechnen Sie die Gleichung der Asymptote für $y = \frac{3x^2 + 5}{x + 2}$. Wo sind die Unstetigkeitsstellen und wie ist das Verhalten der Funktion bei Näherung an den Pol? $y = 3x - 6$ -2 v.l. $-\infty$ v.r. $+\infty$
- 305 Ermitteln Sie die Pole und das Verhalten bei Näherung an die Pole für die Funktion:
 $y = \frac{5x - 10}{x^2 - 3x - 70}$. Wo hat die Funktion eine Nullstelle? -7 und 10 beide $-\infty$ und $+\infty$ $N(2 / 0)$
- 306 Ermitteln Sie die Gleichung der Asymptote von $y = \frac{3x^3 + 4}{x^2 + 2}$ $3x$
- 307 Ermitteln Sie die Gleichung der Asymptoten von $y = \frac{6x^3 + 2}{(x + 6)(2x - 4)}$ $y = 3x - 12$ $x = -6$ $x = 2$
- 311 Ermitteln Sie die Gleichung der linearen Asymptote von $y = \frac{10x^3}{2x^2 + 4}$ $y = 5x$

- 313 Die Funktion $y = \frac{ax + b}{x + c}$ soll folgende Eigenschaften haben:
 unstetig an der Stelle $x = -4$, strebt asymptotisch gegen $y = 100$ und geht durch den Punkt $(0/5)$. Bestimmen Sie die Parameter a , b und c ! (100, 20, 4)
- 314 Die Funktion $\frac{ax + b}{x + c}$ soll unstetig an $x = 7$ sein und für $x \rightarrow \infty$ gegen 30 streben. Wie groß sind a und c (30 u. -7)
- 315 Ermitteln Sie die Parameter der Funktion $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ mit folgenden Eigenschaften:
 Nullstelle bei $N(3 / 0)$. Die Funktion strebt gegen 20 und hat einen Pol bei $x = 2$. (20 -60 -2)
- 316 Eine Funktion $y = \frac{ax - 16}{x + b}$ ist unstetig an der Stelle $x = -8$ und strebt gegen 20. Ermitteln Sie a und c !
 Wo liegt die Nullstelle (ohne Tangentensteigung!)? **$a = 20$ und $b = 8$** N (0,8 / 0)

Extremwertaufgaben

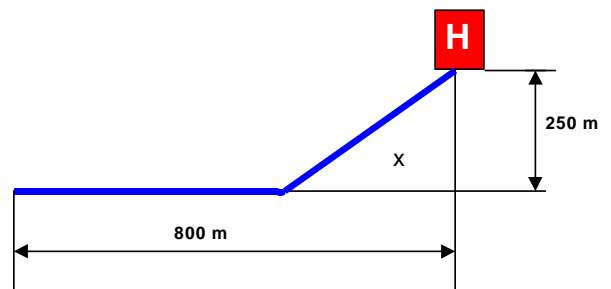
101

Jemand soll von A nach B fahren (siehe Skizze!) Auf der Straße kann er 80 km/h fahren, im Gelände nur 20 km/h. Wo soll er ins Gelände abzuweichen, damit die Gesamtfahrzeit minimal ist. (0,207)



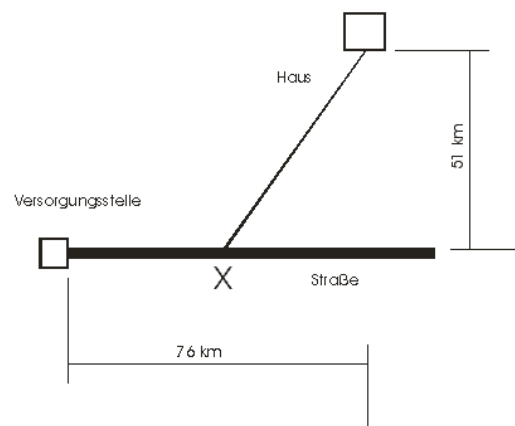
102

Ein 250 m abseits gelegenes Haus H soll durch eine Gasleitung versorgt werden. Entlang der Hauptstraße kostet die Verlegung pro Meter um 30 % weniger als durch das Gelände. Wo ist die Abzweigung zu wählen, damit die Installationskosten minimal werden? Berechnen Sie auch die Kosten für die Randpunkte!
 (810 838,15 K(245) = 738,5)



103

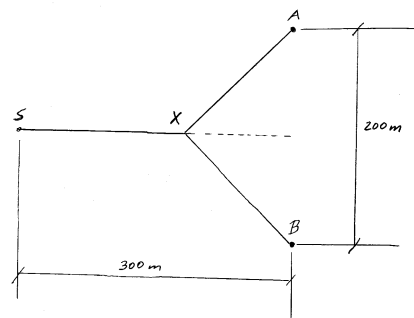
Ein Leitung soll von einer Versorgungsstelle zu einem Haus gezogen werden. Die Verlegung auf der Straße kostet um 60 % weniger als im Gelände. Wo ist der Abzweigepunkt zu wählen, damit die Gesamtverlegekosten minimal werden? (Maße siehe Skizze)



53,74 auf der Straße

104

Die Punkte S, A und B sind gemäß der Skizze mit Rohrleitungen zu verbinden. Die Verbindung SX ist um 30 % billiger als die Verbindungen XA und XB. Wo ist der Verzweigungspunkt X zu wählen, damit die Verbindung möglichst wenig kostet. (37,4)



105

Aus einem Baumstamm mit dem Radius 40 cm soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt geschnitten werden. Die Tragfähigkeit dieses Balkens ist proportional zum Quadrat der Höhe und proportional zur Breite. Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit die Tragkraft maximal wird? (46,19 65,32)

111

Eine quaderförmige Halle mit der Höhe 6 m soll gebaut werden. Es steht ein Budget von EUR 2.000.000 zur Verfügung. Die Errichtungskosten für alle Wände, außer der Frontseite, betragen EUR 200,-- pro Quadratmeter. Die Frontseite ist um 70 % teurer. Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit man eine möglichst große Grundfläche erzielt werden kann? 55,16 mal 74,44

112

- a) Wie hoch ist der maximale Verkehrsfluß (Angabe in Fahrzeuge pro Tag) auf einer zweispurigen Straße, wenn folgende Bedingungen gelten:

erlaubt Höchstgeschwindigkeit: 80 km/h
 durchschnittliche Länge eines Fahrzeuges 4,5 m

$$\text{Abstandsregel: Abstand in Meter} = \left(\frac{\text{Geschwindigkeit in km/h}}{10} \right)^2$$

Bei welcher Geschwindigkeit tritt dieser maximale Verkehrsfluß auf.

113.137 Fz/d bei 21,2 km/h

- b) Um wieviel Prozent ist der Verkehrsfluß bei der erlaubten Höchstgeschwindigkeit geringer als bei der optimalen Geschwindigkeit? – 50,5 %

113

- a) Wie hoch ist der maximale Verkehrsfluß (Angabe in Fahrzeuge pro Tag) auf einer zweispurigen Straße, wenn folgende Bedingungen gelten:

erlaubt Höchstgeschwindigkeit: 90 km/h
 durchschnittliche Länge eines Fahrzeuges 4,5 m

$$\text{Abstandsregel: Abstand in Meter} = \left(\frac{\text{Geschwindigkeit in km/h}}{8} \right)^2$$

Bei welcher Geschwindigkeit tritt dieser maximale Verkehrsfluß auf. (16,97)

- b) Um wieviel Prozent ist der Verkehrsfluß bei der erlaubten Höchstgeschwindigkeit geringer als bei der optimalen Geschwindigkeit? (64 %)

114

Wie hoch ist der maximale Verkehrsfluss auf einer zweispurigen Straße, wenn der Sicherheitsabstand 2 Sekunden betragen soll. Die mittlere Länge eines Fahrzeuges sei 4 m. Die erlaubte Höchstgeschwindigkeit beträgt 130 km/h. Bei welcher Geschwindigkeit tritt dieser maximale Verkehrsfluss auf. Wie hoch ist der Fluss bei 100 km/h?

$$(V(130) = 3.411 \quad V(100) = 3358,2)$$

115

- a) Der stündliche Treibstoffverbrauch y (in t/h) eines Tankers hängt von der Geschwindigkeit v (in Knoten = Seemeilen / Stunde) so ab: $y = 0,05 v^2 + 3$.

Bei welcher Geschwindigkeit kann der Tanker mit einem Treibstoffvorrat von 8.000 t die größte Strecke zurücklegen. Wie groß ist diese Strecke? 10.327 nm bei 7,75 kn

- b) Die Treibstoffkosten betragen \$ 500,-- pro Tonne und eine Stunde Fahrzeit kostet den Reeder \$ 1.200,-- . Mit welcher Geschwindigkeit soll der Tanker (Stundenverbrauch wie in a) unterwegs sein, damit eine bestimmte Strecke mit den geringsten Kosten zurückgelegt werden kann. 10,4 kn

116

- a) Mit welcher Geschwindigkeit kann ein Schiff, dessen stündlicher Treibstoffverbrauch $s = 4 + 0,002 v^3$ ist, die Strecke von 3.000 nm (Seemeilen) mit dem geringsten Gesamtverbrauch zurücklegen. Wie groß ist dieser Verbrauch und wie lange braucht das Schiff für die Fahrt (in Tagen)?
v in kn (Knoten = Seemeilen / Stunde, kn = nm/h), s in t/h. (10 kn, 1.800 t 300 h 12,5 d)

- b) Eine Tonne Treibstoff kostet \$ 280,-- und eine Betriebsstunde ohne Treibstoffkosten \$ 500,--. Mit welcher Geschwindigkeit muß das Schiff fahren, damit die Gesamtkosten für 3.000 nm möglichst klein sind? (v = 11,3 kn)

117

- a) Der stündliche Treibstoffverbrauch in t/h eines Schiffes ist mit $y = 0,002v^3 + 5$ von der Geschwindigkeit des Schiffes in Seemeilen pro Stunde (nm/h = Knoten) abhängig. Bei welcher Geschwindigkeit kann dieses Schiff eine Strecke von 3.000 nm mit minimalem Treibstoffverbrauch zurücklegen? Die Geschwindigkeit des Schiffes kann höchstens 30 Knoten betragen. 10,8 kn

118

Die Wärmedämmungskosten $K(d)$ hängen vom Grad der Dämmung d (angegeben in Prozent) so ab:

$$K(d) = \frac{400.000d}{100 - d}$$

Durch die Wärmedämmung kann eine Einsparung von $E(d) = 8d^2 + 160d$ pro Jahr erzielt werden.

Bestimmen Sie den Grad der Dämmung so, daß die Summe der Einsparungen in 20 Jahren, vermindert um die Kosten, maximal wird! (56,7)

Unbestimmtes Integral - Integrationsmethoden

Teil 1: Grundregeln - Substitution

101

Integrieren Sie die folgenden Funktionen:

a) $5x^4 - 18x^2 + 4x + 20$

$$x^5 - 6x^3 + 2x^2 + 20x + C$$

b) $5 \sin(x) + 8x - \frac{5}{x^3}$

$$-5 \cos(x) + 4x^2 + \frac{5}{2x^2} + C$$

e) $\cos(4x)$

$$\frac{\sin(4x)}{4} + C$$

g) $\frac{5}{2x}$

$$\frac{5 \ln(2x)}{2} + C \quad \text{oder} \quad \frac{5 \ln(x)}{2} + C$$

h) $4e^{2x+1}$

$$2e^{2x+1} + C$$

102 i5

Integrieren Sie die folgenden Funktionen:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\cos(3x)$ | $\frac{\sin(3x)}{3}$ |
| b) $\frac{x^4 - 4x^2 + 10x - 3}{x}$ | $0,25 x^4 - 2 x^2 + 10 x - 3 \ln x$ |
| c) $3x^4 \cdot \sin(x^5 - 10)$ | $-0,6 \cos(x^5 - 10)$ |
| d) $\frac{\ln(x)}{4x}$ | $\frac{\ln^2 x}{8}$ |

103 i6

Integrieren Sie die folgenden Funktionen:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $\sin(4x)$ | $\frac{-\cos(4x)}{4}$ |
| b) $5x \cdot e^{-4x^2}$ | $\frac{-5e^{-4x^2}}{8}$ |

104 i7

Integrieren Sie die folgenden Funktionen nach x:

- | | |
|--|--|
| a) $\cos\left(\frac{4\pi x - 15}{30}\right)$ | $2,39 \sin\left(\frac{4\pi x - 15}{30}\right)$ |
| b) e^{-3x-4} | $-\frac{1}{3} e^{-3x-4}$ |

105 i36

Integrieren Sie:

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a) e^{5x} | $\frac{e^{5x}}{5}$ |
| c) $5x \cos(3x^2)$ | $\frac{5}{6} \sin(3x^2)$ |
| d) $\frac{3}{(4-x)^2}$ | $\frac{3}{(4-x)}$ |
| e) e^{3x} | $\frac{e^{3x}}{3}$ |
| g) $3x \sin(2x^2)$ | $\frac{-3 \cos 2x^2}{4}$ |

Teil 2: Partielle Integration – Integration durch Ansatz

201 4m1

Integrieren Sie die folgenden Funktionen nach x:

- | | |
|------------------------|----------------------------|
| a) $(3x - 10)e^{-2x}$ | $(4,25 - 1,5x)e^{-2x} + C$ |
| b) $5x \cdot \sin(-x)$ | $5x \cos(-x) + 5\sin(-x)$ |
| c) $3x \cdot \sin(-x)$ | $3x \cos(-x) + 3\sin(-x)$ |

203 i145
Integrieren Sie:

$$x^2 \cos(2x)$$

$$\frac{2x^2 \sin(2x) + 2x \cos(2x) - \sin(2x)}{4}$$

204 i152
Integrieren Sie:

a) $(5x^2 + 2x) \cdot e^{-0,1x}$

$$(-50x^2 - 1020x - 10.200) \cdot e^{-0,1x}$$

b) $x \cdot \cos x$

$$x \sin x + \cos x$$

205 i188 L

Berechnen Sie die folgenden Integrale und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich:

a) $\int (4x^2 - 2) e^x dx =$

$$(4x^2 - 8x + 6) e^x$$

b) $\int 4x \sin(3x) dx =$

$$\frac{4 \sin(3x) - 12x \cos(3x)}{9}$$

206 i192

Integrieren Sie und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich:

a) $5x \cos(2x)$

$$\frac{10x \sin(2x) + 5 \cos(2x)}{4}$$

b) $(x^3 + 2x) \cdot e^{-x}$

$$-(x^3 + 3x^2 + 8x + 8) \cdot e^{-x}$$

207 i195

Integrieren Sie die folgenden Funktionen und vereinfachen Sie die Integrale so weit wie möglich:

$$(2x^2 + 3) e^x$$

$$(2x^2 - 4x + 7) e^x$$

Teil 3: Partialbruchzerlegung

Integrieren Sie die folgenden Funktionen nach x:

301 4m1

$$\frac{x^2 - 2}{x - 3}$$

$$\frac{x^2}{2} + 3x + 7 \ln |x - 3| + C$$

303 i5

$$\frac{5x - 4}{x^2(x - 5)}$$

$$\frac{21}{25} \ln(x-5) - \frac{21}{25} \ln x - \frac{4}{5x}$$

304 i6

Integrieren Sie die folgenden Funktionen:

$$\frac{5x - 4}{x^2(x - 3)}$$

$$\frac{11}{9} \ln(x-3) - \frac{11}{9} \ln x - \frac{4}{3x}$$

305 i36

$$\text{a) } \frac{2x+3}{(x-3)^2} \qquad 2\ln|x-3| - \frac{9}{x-3}$$

$$\text{b) } \frac{3x+1}{(x-2)^2} \qquad 3\ln|x-2| - \frac{7}{x-2}$$

306 i50

$$\text{a) } \frac{2x+3}{(x-4)^2} \qquad 2\ln|x-4| - \frac{11}{x-4}$$

$$\text{b) } \frac{3x+4}{(x-3)^2} \qquad 3\ln|x-3| - \frac{13}{x-3}$$

$$312 \quad \int \frac{2x+1}{x(x+4)} dx = \frac{7 \ln(x+4)}{4} + \frac{\ln(x)}{4} + C$$

$$313 \quad \int \frac{x^3 + 5x - 11}{x+2} dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 9x - 29 \ln(x+2) + C$$

$$314. \quad \int \frac{8}{x^2(x-2)^2} dx = 2 \ln(x) - 2 \ln(x-2) - \frac{2}{x} - \frac{2}{(x-2)} = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 + \frac{4}{x(x-2)}$$

$$315 \quad \int \frac{7x+4}{(x+3)(2x-1)} dx = \frac{15 \ln(2x-1) + 34 \ln(x+3)}{14}$$

Anwendung der Infinitesimalrechnung

002

w201

Die Gleichung für die gesamte Produktionsmenge einer chemischen Synthese ist:

$$M(t) = 5t^3 \cdot (10-t)^2 \text{ in } [0/4].$$

Wie groß ist die gesamte Produktionsmenge nach 4 Stunden und der unbrauchbare Anteil in der letzten halben Stunde der Produktion. Geben Sie diesen Anteil in Prozent an! **11.520 l** **21,3 %**

004

w225

Der Zufluss in ein Wasserbecken erfolgt mit $Z(t) = 3t^3(20-t)$, t in Stunden, Z in l/h. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion mit korrekter Darstellung der Nullstellen. Wann ist der Zufluss maximal? Wie hoch ist die Füllmenge des Beckens nach 20 Stunden. **15** **50.625 l/h** **480.000 l**

005

w221

a) Die Produktionsleistung einer chemischen Synthese läuft zeitlich wie $P(t) = \frac{at}{t+b}$.

P in Liter /Minuten und t in Minuten! Berechnen Sie die Gleichung von $P(t)$, wenn die Idealeistung 500 l/min beträgt (d.h. der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 500$) und nach 30 Minuten 80 % der Idealeistung er-

reicht sind.

$$\frac{1.000t}{2t+15}$$

- b) Mit $P(t) = \frac{800t}{t+5}$ (Bedeutung wie in a)): Wie lautet die Gleichung für die Gesamtmenge, wenn $M(0) = 0$ ist?
 $800t - 4.000 \ln(t+5) + 6.437,8$

- c) Die Gleichung für die Gesamtmenge sei $M(t) = 800t - 3.000 \ln(t+6) + 5.375,3$. Wie groß ist die Füllmenge nach 30 Minuten? $18.624,64$

006 w219

Der Zufluss in ein Becken ist in den ersten 8 Stunden $Z_1(t) = 0,6 t^3$. Danach ist $Z_2(t) = 308,8 - 0,2t$. Berechnen Sie die Gleichungen der Füllmenge!
 $0,15 t^4$ und $308,8 t - 0,1 t^2 - 1849,6$

007 w215

- a) Der Zufluss in ein Becken erfolgt in den ersten 8 Stunden wie $Z(t) = 0,2 t^2$. Dann bleibt er konstant groß bis $t = 25$ und nimmt dann linear ab und erreicht bei $t = 40$ den Wert 0. Berechnen Sie die Gleichung von $Z_3(t)$. **$Z(t) = 34,13 - 0,853 t$**

- b) Rechnen Sie mit

$$Z_1(t) = 0,5 t^2 \text{ für } t \in [0 / 8]$$

$$Z_2(t) = 32 \text{ für } t \in (8 / 25] \text{ und}$$

$$Z_3(t) = 112 - 3,2 t \text{ für } t \in [25 / \infty):$$

Berechnen Sie die Gleichungen für den Inhalt des Beckens. Wann ist das Becken leer?

$$I_1(t) = \frac{5 t^3}{30} \quad I_2(t) = 32 t - 170,67 \quad I_3(t) = 112 t - 1,6 t^2 - 1.170,67 \quad t = 57,2 \text{ h}$$

008 w214

- a) Die Produktionsleistung einer chemischen Synthese läuft zeitlich wie $P(t) = \frac{at^2}{t^2 + b}$.

P in Liter /Minuten und t in Minuten! Berechnen Sie die Gleichung von $P(t)$, wenn die Idealeistung 500 l/min beträgt (d.h. der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 500$) und nach 60 Minuten 80 % der Idealeistung erreicht sind.

$$a = 500 \quad b = 900$$

- b) Rechnen Sie mit $P(t) = \frac{15 t^2}{t+3}$:

Wie groß ist die produzierte Gesamtmenge nach 30 Minuten? Wann ist die Produktion zu stoppen, wenn nur 4.000 l produziert werden müssen?

$$M = 135 \ln(t+3) + 7,5 t (t-6) - 148,312 \quad M(30) = 5.723,71 \quad \text{und} \quad t = 25,4 \text{ Minuten}$$

011 w206

Die Produktionsleistung einer chemischen Analyse verläuft wie $P(t) = \frac{at^2}{t^2 + b}$, wobei P in l/min und t in Minuten angegeben ist. Bestimmen Sie die Parameter a und b , wenn die Idealeistung 500 l/min ist und nach 20 Minuten die Hälfte der Idealeistung erreicht wird!

$$P(t) = \frac{500t^2}{t^2 + 400}$$

012 w193

Die Gleichung für die Produktionsleistung sei $P(t) = \frac{500t}{t+5}$. Wann ist die produzierte Gesamtmenge 800 m³?

5,13 h

013 w190

1. Der Zufluß in ein Becken verläuft sinusförmig mit der Periode 32 h zwischen den Extremwerten 40 l/h und 2 l/h. Das Minimum tritt nach 10 Stunden auf. Ermitteln Sie die Füllmenge nach 50 h, wenn $M(0) = 0$ war.

$$M(50) = 1.115,8 \text{ Liter}$$

014 w189

Der Zu- (bzw. Abfluß) in ein Staubecken verläuft mit $Z(t) = 40 + 50 \sin(0,13t - 3)$. t in h und Z in l / h.
 Berechnen Sie die Periode, den Maximal- und Minimalwert von $Z(t)$.
 Ermitteln Sie die Gleichung für den Inhalt des Beckens, wenn $M(0) = 200$ l war.
 $Z_{\max}(t) = 90$ l/min $Z_{\min}(t) = -10$ l/min $p = 48,3$ min $M(t) = 40t - 384,6 \cos(0,13t-3) - 180,75$

017 w226

Die Anzahl der Neuinfizierten einer Epidemie sei $N(t) = 30t - t^2$. Berechnen Sie eine Gleichung für die Anzahl der Kranken $K(t)$. Wann ist der Höhepunkt der Epidemie und wann ist die Epidemie zu Ende?
 30 45

018 w224

Ein epidemiologische Modell benutzt die Beziehungen (K ist die Anzahl der zum Zeitpunkt t kranken Menschen):
 $K_1(t) = 3t^2$ für $t \in [0 / 10]$.
 $K_2(t)$ ist quadratisch mit stetigem Übergang bei $t = 10$ und einer Nullstelle bei $t = 30$. Die Ableitungen von K_1 und $K_2(t)$ stimmen am Übergangspunkt überein.
 Berechnen Sie $K_2(t)$! $-3,75t^2 + 135t - 675$

019 w222

- a) Eine Epidemie verläuft in den ersten 12 Tagen wie $K_1(t) = 340t^2$ in $[0 / 12]$. Danach wie eine quadratische Funktion mit folgenden Eigenschaften: stetiger Übergang ohne Knick (also auch stetig differenzierbar) mit einer Nullstelle bei $t = 40$. Bestimmen Sie die Gleichung von $K_2(t)$.
 $-353,86t^2 + 16.653t - 99.918,4$
- b) Die Anzahl der Neuinfizierten $N(t)$ in einer Population gehorche der Gleichung
 $N(t) = 200 \cdot e^{0,2t}$ (t in Tagen, N in Neuerkrankungen pro Tag). Berechnen Sie die Gleichung für die Anzahl der Kranken $K(t)$. Wann sind 5.000 Individuen erkrankt?
 $1.000(e^{0,2t} - 1) - 9$

020 w220

Die Anzahl der Neuinfizierten sei $N(t) = \frac{500t}{t^2 + 4}$. Berechnen Sie die Gleichung der Funktion $K(t)$, wobei $K(t)$ die Anzahl der Kranken ist. $250 \ln(t^2 + 4) - 346,6$

021 w212

- a) In den ersten 16 Tagen wächst die Zahl der Neuinfizierten (I) einer Epidemie exponentiell und zwar mit einer Wachstumsrate von 23 %. $I(0)$ sei 5. Danach verhält sich $I(t)$ wie eine quadratische Funktion mit folgenden Eigenschaften: die Funktion I ist an der Übergangsstelle stetig und stetig differenzierbar und sie hat eine Nullstelle bei $t = 30$. Ermitteln Sie die Gleichungen der beiden Teile der Funktion $I(t)$.
 ($a = -2,73$ $b = 115,76$ $c = -1.015,8$)
- b) Rechnen Sie diesen Punkt mit
 $I_1(t) = 30 \cdot e^{0,2t}$ für $t \in [0 / 16]$ und $I_2(t) = -14,27t^2 + 603,8t - 5.272$ für $t \in [16 / \infty)$
 Wann ist die Epidemie zu Ende. Wann ist der Höhepunkt der Epidemie und wie viele Leute sind maximal krank?
 (nach 39 Tagen ist die Epidemie zu Ende Maximum $t = 30$ $K_2(30) = 15.199$)

022 w207

Die Anzahl der Kranken bei einer Epidemie ist in der ersten Woche $K_1(t) = 30(e^{1,4t} - 1)$ für $t \in [0 / 7]$. Berechnen Sie $K_2(t)$, wenn $I_2(t) = -2t^2 + 5t$ in $(7 / \infty)$ ist. $I_2(t)$ ist die Anzahl der Neuinfizierten zum Zeitpunkt t .
 $K_2(t) = 2,5t^2 - 0,666...t^3 + 541.088$

Preis – Kosten- Theorie

Teil 1: Klassische Modelle

- 101 k57
 Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze im Bereich $[0 / 100]$ für
 a. $K(x)=3x^2+2x+10$ 12,95 GE/ME
 b. $K(x)=130x+3.000$ 160 GE/ME
- 102 k69
 Ermitteln Sie die langfristige Preisuntergrenze für einen Betrieb mit $K(x)=3x+500$ im Bereich $[0/200]!$ 5,5
- 103 k155 L
 Berechnen Sie die Gleichung einer S-förmigen Kostenkurve aus folgenden Angaben:
 Die Kosten bei 70 %-iger Auslastung betragen 199 GE.
 Die Grenzkosten bei 80 %-iger Auslastung betragen 116 GE / ME.
 Der progressive Teil der Kostenfunktion beginnt bei 20 % Beschäftigungsgrad und die Fixkosten sind 10 GE.
 Rechnen Sie mit 1 ME = 10 % Beschäftigungsgrad. **a = 1 b = -6 c = 20 d = 10**
- 104 k159
 Berechnen Sie die Gleichung einer S-förmigen Kostenkurve aus folgenden Informationen:
 Die Kosten beim Beschäftigungsgrad 20 ME betragen EUR 300.000,--, die Grenzkosten beim gleichen Beschäftigungsgrad sind 5.000,-- EUR/ME. Bei Vollausslastung (100 ME) sind die Grenzkosten 15.000,-- EUR/ME. Die Fixkosten betragen EUR 200.000,--.
 $K(x) = 0,447x^3 - 17,86x^2 + 5.178,6x + 200.000$
- 105 k161
 Berechnen Sie die Gleichung einer progressiven Kostenfunktion aus folgenden Daten:
 Kapazität des Betriebes: 800 ME
 Grenzkosten bei 60 % Beschäftigungsgrad 2.885,-- GE/ME
 Kosten bei 20 % BG 77.700 GE
 Fixkosten 100 GE
 $(3x^2 + 5x + 100)$
- 106 k162
 Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze für $K(x) = 0,2x^2 + 40x + 500.000$ (672,5)
- 107 k164
 Ermitteln Sie die Break-even für $K(x) = x^2 + 100x + 30.000$ und einer linearen Nachfragefunktion mit einer Sättigungsmenge von 8.000 ME und einem Prohibitivpreis von 5.000 GE/ME. (6,1 u. 3009)
- 108 k165
 a) Ermitteln Sie eine progressiv verlaufende Kostenfunktion (quadratischer Ansatz) mit folgenden Eigenschaften:
 Fixkosten 800 GE, die Kosten beim Beschäftigungsgrad 10 betragen 1.500 GE und die Grenzkosten an dieser Stelle sind 120 GE / ME. $(5x^2 + 20x + 800)$
 b) Ermitteln Sie für $K(x) = 7x^2 + 30x + 900$ die langfristige Preisuntergrenze (188,75)
- 109 k166
 a) Ermitteln Sie für $K(x) = 10x^2 + 50x + 150$ und $p(x) = 200 - 0,2x$ den Cournotpunkt! (7,35 / 1.98,53)
 b) Ermitteln Sie für $p(x) = \frac{300-x}{x+4}$ die Stelle des maximalen Erlöses! 30,87

- 110 k167
 Ein Produkt weist eine progressiv verlaufende Kostenfunktion auf: $K(x) = 0,4x^2 + 6x + 10.000$
 Die Nachfragefunktion ist linear mit $p(x) = 400 - 0,4x$
 Berechnen Sie die Gewinn Grenzen, den Cournotpunkt, den maximalen Erlös und die Elastizität bei einem Preis von 300 GE/ME! 26,84 465,7 (246,25 / 301,5) 100.000 3
- 111 k168
 a) Berechnen Sie den maximalen Gewinn für $K(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 250$ bei einem festen Preis von 75 GE/ME. 296,34
 b) Berechnen Sie die Gleichung einer quadratischen Nachfragefunktion aus: bei einem Preis von 1.320,- GE/ME pro Stück werden 20 ME abgesetzt. Erhöht man den Preis um 175,2 GE/ME, dann sinkt der Absatz um 10 %. Der Prohibitivpreis beträgt 3.000 GE/ME. $-0,2x^2 - 80x + 3000$
- 112 k172
 a) Berechnen Sie eine lineare Nachfragefunktion aus: die Sättigungsmenge beträgt 15.000 ME und bei einem Preis von 140 GE/ME werden 8.000 ME verkauft. Berechnen Sie weiters den Gleichgewichtspreis, wenn sich das Angebot wie $a(x) = 50 + 0,03x$ verhält! $300 - 0,02x$ 200
 b) Die Elastizität der Nachfrage ist $\eta(x) = \frac{(20-x)(x+3)}{23x}$. Berechnen Sie die Gleichung der Nachfragefunktion mit $p(7) = 130!$ $\frac{2.000 - 100x}{x + 3}$
- 113 k171
 a) Eine S-förmige Kostenfunktion hat minimale Grenzkosten von 75 GE/ME beim Beschäftigungsgrad 5 ME. Die Kosten an dieser Stelle sind 1.750 GE. Die Fixkosten betragen 1.000 GE. Berechnen Sie die Gleichung dieser Kostenfunktion! $3x^3 - 45x^2 + 300x + 1.000$
 b) Berechnen Sie die Gewinn Grenzen und den maximalen Gewinn für $K(x) = 0,2x^2 + 4x + 100$ und einem festen Preis von 30 GE/ME! 3,97 126,03 745
- 114 k173
 Berechnen Sie für $K(x) = x^3 - 21x^2 + 200x + 50$ und $p(x) = \frac{2.000 - 100x}{x + 10}$:
 a) den Beschäftigungsgrad, bei dem der Erlös maximal wird 7,32
 b) das Betriebsoptimum 10,72
- 115 k176
 Berechnen Sie den Cournotpunkt für folgende Funktionen: $K(x) = 3x^2 + 15x + 500$ und $p(x) = 2000 \cdot e^{-0,2x}$. 4,72 778
- 116 k177
 Ermitteln Sie die langfristige Preisuntergrenze für einen Betrieb mit einer linearen Kostenfunktion. Die konstanten Grenzkosten betragen 150 € / Stk. und die Fixkosten sind € 20.000,-. Die Kapazität dieses Betriebes ist 1.200 Stk. 166,67
- 117 k178
 Ermitteln Sie die Stelle des maximalen Erlöses für die Nachfragefunktion $p(x) = -0,2x^2 - 20x + 1000$. 19,37

Teil 3:

Advanced

301

k66

a. Ein Betrieb mit einer Kapazität von 300.000 Stk. pro Jahr ermittelt folgende Werte:

- * Die Fixkosten betragen € 2,5 Mio. pro Jahr
- * Die minimalen Grenzkosten betragen 180 €/Stk. und treten bei einer Auslastung von 70 % ein!
- * Die Grenzkosten bei Vollaustauslastung betragen 420 €/Stk.!

Berechnen Sie die Gleichung der S-förmigen Kostenfunktion mit 1 GE = € 1.000.000,- und 1 ME = 10.000 Stk.!

Koeffizienten auf 2 Dezimalen genau! $K=0,01x^3-0,62x^2+14,9x+2,5$

b. Auf einem vollkommenen Markt gelten für Angebots- und Nachfragefunktion:

- * $a(x)$ ist linear: bei einem Preis von € 5.000,- pro Stk. wird nichts mehr angeboten. Steigt der Preis um € 100,- pro Stk., dann wird das Angebot um 400 Stk. erhöht!
- * $p(x)$ ist hyperbolisch: $p(x)=56.000.000/x$!

α) Wie hoch ist der Gleichgewichtspreis?

β) Wie hoch ist der Angebotsüberhang bei einem Preis von € 9.000,- pro Stk.?

$0,25x+5000$, € 7.000,-p.Stk., 9.778 Stk.

c. Berechnen Sie für $K(x)=3x^2+x+49$ und $p=32$ GE/ME:

- i. die langfristige Preisuntergrenze <25,2 GE/ME>
- ii. die Gewinn Grenzen <1,9 und 8,4 ME>
- iii. den maximalen Gewinn <31,1 GE>

d. Berechnen Sie für $K(x)=3x^2+x+49$ und $p(x)=100-10x$ den Cournotpunkt!

Zeichnen Sie K_d , K' , p und E in ein Koordinatensystem ($x: 1:1$ $y: 1:10$) <(3,8 ME/ 61,9 GE/ME) >

302

k113

Ein Betrieb mit einer Vollaustauslastung von 10.000 Stück pro Monat hat die Kostenkehre bei einem BG von 50 %.

Die Fixkosten betragen € 400.000,- pro Monat.

Die minimalen Grenzkosten betragen € 100,- pro Stk..

Die Durchschnittskosten bei Vollaustauslastung sind € 640,- pro Stk..

Das erzeugte Produkt hat eine lineare Nachfragefunktion mit einer abgesetzten Menge von 2.000 Stk. bei einem Preis von € 1.200,- pro Stk. und einer Elastizität von 4 bei dieser Absatzmenge.

a. Rechnen Sie auf 1 GE = € 100.000,- und 1 ME = 1.000 Stk. um!

ACHTUNG: Vorsicht bei GE/ME ! e bleibt als dimensionslose Größe natürlich gleich!

Berechnen Sie die Kostenfunktion 3. Grades!

b. Berechnen Sie die Nachfragefunktion!

c. Berechnen Sie mit $K(x)=0,2x^3-3x^2+16x+4$

und $p(x)=16-1,6x$

die Gewinn Grenzen, das Betriebsoptimum und den Cournotpunkt!

d. Graphische Darstellung

L: $K(x)=0,2x^3-3x^2+16x+4$ und $p(x)=15-1,5x$ 2 6,5 7,7 (4,7/8,5)

303

k126

Berechnen Sie die Preisfunktion aus:

a) $e(x) = \frac{4.000 - 26x}{26x}$

$p(3) = 196,1$

$200 - 1,3x$

b) $e(x) = \frac{2}{x}$

$p(20)=0,00227$

$50 \cdot e^{-0,5x}$

c) $e = 20 - 4x$

$p(4)=0,2$

$0,2 \sqrt{\frac{20-4x}{x}}$

c. Zeichnen Sie die Kostenfunktion und die Erlösgerade in ein Koordinatensystem im Maßstab:

x ... 1:1

y ... 1:1

d. Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze! (0,564)

e. Berechnen Sie den maximalen Gewinn! (0,85)

f. Berechnen Sie die Gewinn Grenzen und geben Sie die Bereiche an, in denen ein Gewinn erzielt wird! [3,3/7,7]

[11,1/13]

307

k143

Berechnen Sie aus den folgenden Elastizitätsfunktionen die Nachfragefunktion und die Stelle des maximalen Erlöses:

a) $e(x) = \frac{50}{x} - 1$ $p(10) = 160$ $200 - 4x$ 25

b) $e(x) = \frac{5}{x}$ $p(0) = 100$ $100 \cdot e^{-0,2x}$ 5

c) $e = 6 - 0,2x$ $p(3) = 100$ $90,668 \sqrt[6]{\frac{60-2x}{10x}}$ 25

d) $e(x) = \frac{175 + 30x - x^2}{40x}$ $p(5) = 15$ $\frac{175 - 5x}{x + 5}$ 9,1

308

k144

a) Ermitteln Sie eine S-förmige Kostenfunktion aus:

die minimalen Grenzkosten treten beim Beschäftigungsgrad 7 ME auf und betragen 5,3 GE/ME,

die Kosten beim Beschäftigungsgrad 10 ME betragen 95 GE und

die Grenzkosten an dieser Stelle sind 8 GE/ME.

$0,1x^3 - 2,1x^2 + 20x + 5$

b) Die Elastizität der Nachfrage ist $e(x) = \frac{-2x^2 + 32x + 72}{40x}$ Prohibitivpreis von 90 GE/ME.

Berechnen Sie die Nachfrage-funktion! $\frac{180 - 10x}{x + 2}$

Rechnen Sie die folgenden Punkte mit

$K(x) = x^3 - 21x^2 + 200x + 50$ und $p(x) = \frac{4.000 - 200x}{x + 10}$ in [0/20]

Alle Resultate auf eine Dezimale genau!

c) Berechnen Sie das Betriebsoptimum! 10,7

d) Berechnen Sie die Gewinnzone mit den zugehörigen Preisen! 383/94

e) Berechnen Sie die Koordinaten des Cournotpunktes! (5,1/197,4)

f) Wie verläuft die Erlösfunktion? Berechnen Sie die Stelle des maximalen Erlöses und die lineare Asymptote.

7,3 6000-200x

g) Zeichnen Sie Kosten-, Erlös- und Nachfrage-, Durchschnittskosten-, Grenzkosten- und Grenzerlösfunktion in zwei gekoppelte Koordinatensysteme.

Maßstab: Abszisse: 1 : 1 Ordinate (GE) 1 : 100 Ordinate (GE/ME) 1 : 50

309

k145

Berechnen Sie aus den folgenden Elastizitätsfunktionen die Nachfragefunktion und die Stelle des maximalen Erlöses:

a) $e(x) = \frac{100}{x} - 1$ $p(10) = 450$ $500 - 5x$ 50

b) $e(x) = \frac{1}{2x}$ $p(1) = 13,534$ $100 \cdot e^{-2x}$ 0,5

c)	$e(x) = \frac{(x-10)^2}{20x - 2x^2}$	$p(5) = 25$	$(x-10)^2$	3,33
d)	$e(x) = \frac{30-5x}{30}$	$p(1) = 25$	$\frac{30-5x}{x}$	0

310

k152

Ermitteln Sie die Gleichung der Nachfragefunktion aus $e(x) = \frac{160 + 64x - 8x^2}{96x}$ mit $p(2)=16!$

L: $p=(80-8x)/(x+2)$

311

k154 L

Beispiel 4:

Monopolist mit linear-progressivem Kostenverlauf

- a) Ein Monopolist hat Fixkosten von 4 GE und bis zu einer Auslastung von 10 ME konstante Grenzkosten von 0,4 GE/ME. Danach steigen die Grenzkosten linear an und erreichen bei 15 ME den Wert 2 GE/ME. Im Übergangspunkt verlaufen die Grenzkosten stetig.
Berechnen Sie die Gleichungen der Kostenfunktion in den beiden Bereichen! $(0,16x^2 - 2,8x + 20)$
- b) Berechnen Sie eine lineare Nachfragefunktion aus folgenden Informationen:
Die Nachfrage bei einem Preis von 10 GE/ME beträgt 4 ME und die Elastizität an der Stelle 2 ME beträgt 3,5. $(18 - 2x)$

Rechnen Sie die folgenden Punkte mit: $K_1(x) = 3 + 0,5x$ in $[0 / 10]$ und

$K_2(x) = 0,3x^2 - 5,5x + 33$ in $[10 / 15]$ und

$p(x) = 6 - 0,4x$

- c) Berechnen Sie die Gewinngrenzen! 0,57 12,7
 d) Wo liegt das Betriebsoptimum? 10,48
 e) Wie lauten die Koordinaten des Cournotpunktes? $(6,875 / 3,25)$

312

k157

- a) Berechnen Sie die Gleichung einer S-förmigen Kostenkurve aus folgenden Angaben:
 Die Kosten bei 70 %-iger Auslastung betragen 199 GE.
 Die Grenzkosten bei 80 %-iger Auslastung betragen 116 GE / ME.
 Der progressive Teil der Kostenfunktion beginnt bei 20 % Beschäftigungsgrad und die Fixkosten sind 10 GE.
 Rechnen Sie mit 1 ME = 10 % Beschäftigungsgrad. **a = 1 b = -6 c = 20 d = 10**

- b) Berechnen Sie für $K(x) = x^2 + 100x + 100$ und $p(x) = 300 - 20x$:
 die Gewinngrenzen
 den Cournotpunkt
 das Betriebsoptimum
 die Sättigungsmenge
 $x_1 = 0,53$ und $x_2 = 8,99$ ME C (4,76 / 204,76) x = 10 15

313

k168

- a) Berechnen Sie den maximalen Gewinn für $K(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 250$ bei einem festen Preis von 75 GE/ME. 296,34
- b) Berechnen Sie die Gleichung einer quadratischen Nachfragefunktion aus: bei einem Preis von 1.320,- GE/ME pro Stück werden 20 ME abgesetzt. Erhöht man den Preis 175,2 GE/ME, dann sinkt der Absatz um 10 %. Der Prohibitivpreis beträgt 3.000 GE/ME. $-0,2x^2 - 80x + 3000$

314

k163

Ermitteln Sie den Cournotpunkt für $K(x) = 3x + 5.000$ und $p(x) = 10.000 - 2x$. Ermitteln Sie den maximalen Gewinn! (2.499,25 5.001,5 12.487.501)

315

k169

a) Berechnen Sie die Gleichung der Nachfragefunktion aus $\eta(x) = \frac{5}{x}$ mit $p(4) = 26,96$. Wie hoch ist der maximale Erlös? $60 \cdot e^{-0,2x}$

b) Berechnen Sie die Gleichung der Nachfragefunktion $\eta(x) = \frac{60-x}{x}$ mit dem Prohibitivpreis 3.000 GE/ME! $p = 3.000 - 50x$

316

k175

Die Nachfragefunktion eines Produktes ist linear mit der Elastizität von 1,5 an der Stelle 20 ME. Bei einem Preis von 200 GE/ME können 40 ME verkauft werden. Berechnen Sie diese Funktion. -20 1000