Name: **Datum:**

Quotientenregel - Erarbeitungsaufgaben zur Herleitung der Quotientenregel

Stellen wir uns vor, zwei Funktionen f und g mit den Definitionsmengen D_f und D_g und den Funktionstermen $f(x)$ und $g(x)$ seien gegeben. Aus f und g können wir die sogenannte **Quotientenfunktion** f/g mit dem Funktionsterm $f(x)/g(x)$ konstruieren. Ist beispielsweise $f(x)=\sqrt{x}$ mit $D_f=[0\,;+\infty[$ und $g(x)=x^2$ mit $D_g=\mathrm{IR}$, dann ist der Funktionsterm der Quotientenfunktion $\sqrt{x}/x^2$. Werte der Quotientenfunktion zu einem Argument werden berechnet, indem man das Argument in die einzelnen Terme einsetzt und deren Werte dann durcheinander dividiert.

Weiter seien die beiden Funktionen f und g auf offenen Intervallen I_f bzw. I_g differenzierbar und ihre Ableitungen f' und g' bzw. deren Funktionsterme $f'(x)$ und $g'(x)$ seien bekannt. In unserem Beispiel wäre dann $I_f=]0\,;+\infty[$ und $I_g=\mathrm{IR}$ sowie $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $g'(x)=2x$.

Ziel der folgenden Überlegungen ist es nun, die Ableitungsfunktion $(f/g)'$ der Quotientenfunktion, genauer deren Funktionsterm $(f(x)/g(x))'$, zu bestimmen. Dies wird Ihnen mit Hilfe der vorgegebenen Voraussetzungen, den Ihnen bekannten Methoden der \Differenzialrechnung und einigen algebraischen Umformungen gelingen; Sie haben dann die sogenannte **Quotientenregel** zur Ableitung von Quotientenfunktionen hergeleitet. Gehen Sie dabei bitte genau nach den folgenden Schritten vor.

a) *Begründen Sie, warum die Definitionsmenge* $D_{f/g}$ *der Quotientenfunktion* f/g *die Menge* $(D_f\cap D_g)\setminus N_g$ *ist, wobei* N_g *die Menge der Nullstellen der Funktion g ist.*

b) *Begründen Sie, warum die Quotientenfunktion* f/g *nur auf dem offenen Intervall* $I_{f/g}=(I_f\cap I_g)\setminus N_g$ *differenzierbar sein kann.*

Betrachten Sie nun im folgenden eine beliebige Stelle x_0 des offenen Intervalls $I_{f/g}$, an der natürlich beide Funktionen f und g differenzierbar sind.

c) *Notieren Sie die beiden Differenzenquotienten, deren Grenzwerte wegen der Differenzierbarkeit der Funktionen* f *und* g *an der Stelle* x_0 *existieren müssen. Diese beiden Grenzwerte werden bekanntlich mit* $f'(x_0)$ *und* $g'(x_0)$ *bezeichnet.*

d) *Notieren Sie den Differenzenquotienten, dessen Grenzwert im folgenden bestimmt werden muss, um die Ableitung der Quotientenfunktion* f/g *an der Stelle* x_0 *zu bestimmen.*

e) *Bringen Sie den Differenzenquotienten aus Aufgabenteil* **d)** *auf einen Bruchstrich, addieren Sie im Zähler des Bruches einmal den Term* $f(x_0)\cdot g(x_0)$, *subtrahieren Sie diesen Term im Zähler gleich wieder und begründen Sie, warum Sie dies tun dürfen, ohne an dem Wert des Bruchterms etwas zu ändern.*

f) *Formen Sie den Differenzenquotienten aus Aufgabenteil* **e)** *so um, dass die beiden Differenzenquotienten aus Aufgabenteil* **c)** *darin erkennbar werden.*

g) *Bestimmen Sie nun den Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle* x_0. *Nutzen Sie dabei insbesondere die Bezeichnungen aus Aufgabenteil* **c)**.

h) *Begründen Sie, dass mit dem Ergebnis von Aufgabenteil* **g)** *gezeigt ist, dass die Quotientenfunktion* f/g *auf dem offenen Intervall* $I_{f/g}$ *differenzierbar ist und dass für die Ableitungsfunktion* $(f/g)'$, *genauer deren Funktionsterm, gilt:*

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}}$$