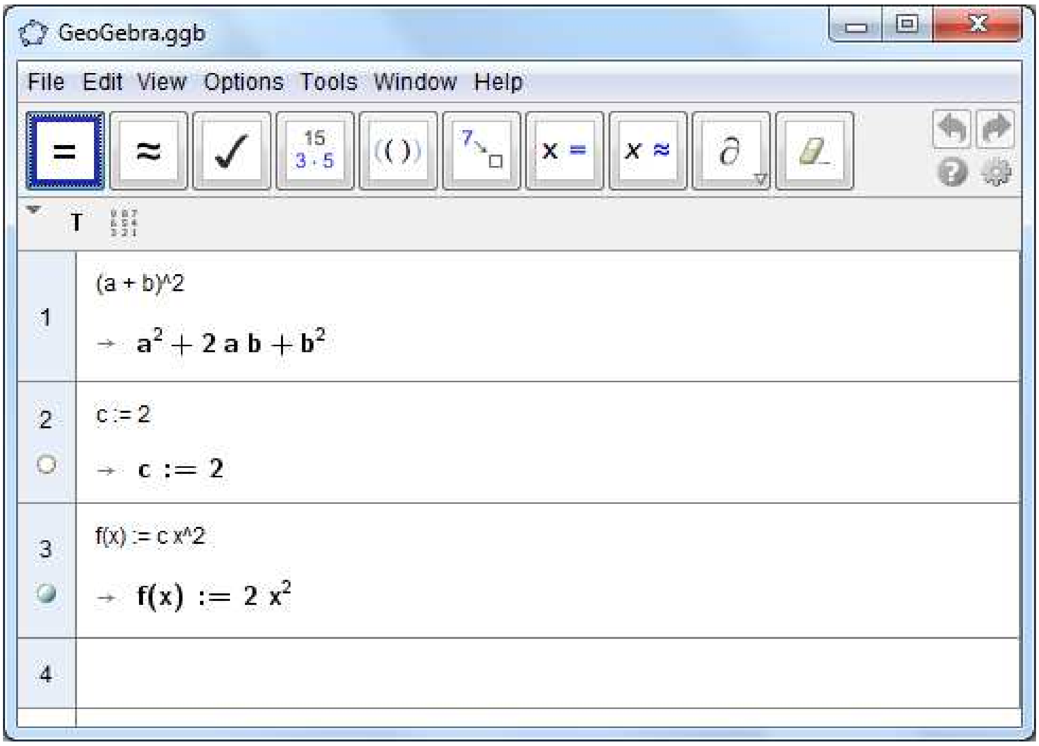
CAS-Ansicht – Computer Algebra System & Cas spezifische Befehle

GeoGebra Workshop Handout 10

1. Einführung in die GeoGebra CAS-Ansicht

Die CAS-Ansicht ermöglicht die Verwendung eines CAS (Computer Algebra System) für ein symbolisches, dynamisches Rechnen mit Brüchen, Gleichungen und Formeln mit unbekannten Variablen. Die Ansicht besteht aus Zeilen, die Eingaben und Ausgaben anzeigen können.

Sie erhalten die *CAS-Ansicht*, indem Sie entweder im Menü *Ansicht* x= *CAS* wählen oder in der Seitenleiste die Perspektive x= *CAS & Grafik* auswählen.



Eingabe in CAS-Zeilen

Um einen intuitiven Zugang zu ermöglichen, werden Gleichungen in der CAS Ansicht – so wie von der GeoGebra Eingabezeile bekannt – mit einfachem Gleichheitszeichen eingegeben. Zur Auswertung von Zeilen der CAS Ansicht stehen drei verschiedene Werkzeuge über die Werkzeugleiste zur Verfügung:

- = *"Berechne"* berechnet und vereinfacht die Eingabe symbolisch,
- ≈ *"Numerisch"* berechnet die Eingabe numerisch und liefert die Ausgabe in Dezimalschreibweise und mit
- ✓ *"Behalte Eingabe"* kann die Eingabe unverändert ausgewertet werden.

Letzteres ist insbesondere bei der Einführung von Termumformungen interessant, wenn man bewusst das "Vereinfachen" von Ausdrücken verhindern möchte. Das gewählte Werkzeug wird jeweils auf die ganze Zeile bzw. den markierten Teilausdruck angewandt.

Folgende Unterschiede zur Eingabezeile sind bei den Zeilen in der CAS-Ansicht zu berücksichtigen:

- Es können Variablen verwendet werden, denen noch kein Wert zugewiesen wurde, zum Beispiel `(a + b)^2` liefert `a^2 + 2ab + b^2`, wenn `a` und `b` unbelegte Variablen sind.
- „=" wird für Gleichungen und „`:=`" für Zuweisung gebraucht. Das bedeutet, dass durch die Eingabe von `a := 2` der Variablen `a` der Wert 2 zugewiesen wird, während eine Gleichstellung `a = 2` liefert.

Einführung der neuen Werkzeuge in der CAS-Ansicht

=	**Berechne**	**Neu!**	$7 \searrow \square$	**Ersetze**	**Neu!**
≈	**Numerisch**	**Neu!**	x =	**Löse**	**Neu!**
✓	**Behalte Eingabe**	**Neu!**	x ≈	**Löse numerisch**	**Neu!**
$\frac{15}{3 \cdot 5}$	**Faktorisiere**	**Neu!**	∂	**Ableitung**	**Neu!**
(( ))	**Multipliziere**	**Neu!**	∫	**Integral**	**Neu!**

Wichtige Tastenkombinationen

- *Eingabetaste*: Eingabe auswerten
- *Strg - Enter*: Numerische Auswertung, z. B. `3/4` ergibt `0.75`
- *Alt - Enter*: Eingabe überprüfen aber nicht auswerten, z. B. `b + b` bleibt *b + b*
- In einer leeren Zeilen können Sie folgende Tastenkombinationen verwenden:
  - Leertaste für die vorherige Ausgabe
  -) für die vorherige Ausgabe in Klammern
  - = für die vorherige Eingabe
- Unterdrücken Sie die Ausgabe, indem Sie am Ende der Eingabe ein Semikolon eintippen, z. B. `a := 5;`

Es ist auch möglich Bezüge zu anderen Zeilen herzustellen. Dies kann auf zwei Arten realisiert werden:

- Statische Bezüge kopieren die Ausgabe einer anderen Zeile und werden **nicht** aktualisiert, wenn sich die kopierte Zeile verändert
  - # fügt die vorherige Ausgabe als Kopie ein
  - #5 fügt die Ausgabe aus Zeile 5 als Kopie ein

- Dynamische Bezüge fügen anstelle einer Kopie eine Verknüfung mit der Ausgabe einer anderen Zeile ein. Spätere Änderungen der kopierten Zeile **werden** sich daher auch auf diese Zeile auswirken
  - $ fügt die vorherige Ausgabe dynamisch ein
  - $5 fügt die Ausgabe aus Zeile 5 dynamisch ein

2. Gleichungsumformungen

Gleichungsumformungen sind besonders in der Unterstufe von Bedeutung. In diesem Beispiel sehen Sie, wie man Äquivalenzumformungen auf einer Gleichung durchführt.

Vorbereitungen

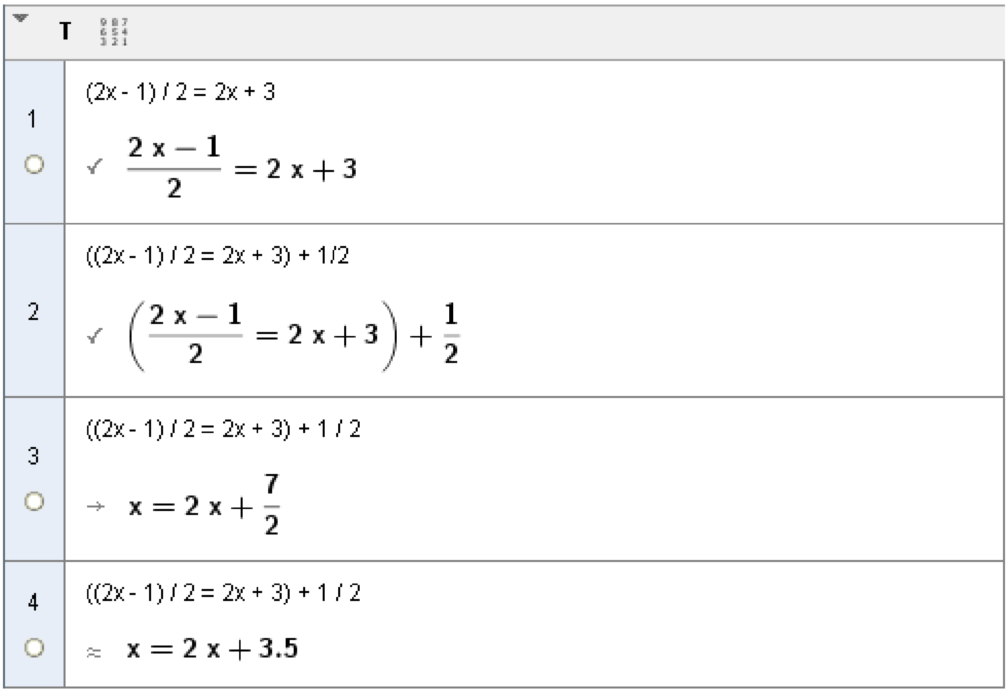
- Öffnen Sie eine neue GeoGebra Datei.
- Seitenleiste *Perspektiven* – *CAS & Grafik.*

Einführung der neuen Werkzeuge

=	**Berechne**	**Neu!**
≈	**Numerisch**	**Neu!**
✓	**Behalte Eingabe**	**Neu!**

Konstruktionsanleitung

Nach der Konstruktionsanleitung sollte Ihre CAS-Ansicht folgende Zeilen beinhalten:



1	✓	Schreiben Sie die gegebene Gleichung in die erste Zeile der CAS-Ansicht: `(2x - 1) / 2 = 2x + 3` Durch Verwenden des Werkzeuges *Behalte Eingabe* bleibt die Eingabe so stehen.
2	✓	Um die Ausgabe der ersten Zeile zu erhalten, verwenden Sie `)`, dadurch wird die Ausgabe in Klammer gesetzt, und ergänzen Sie diese Gleichung mit `+ 1/2`. Verwenden Sie wieder das Werkzeug *Behalte Eingabe* und lassen Sie die Eingabe so stehen.
3	=	Mit der Leertaste erhalten Sie die vorherige Ausgabe in der dritten Zeile. Verwenden Sie das Werkzeug *Berechne*, um die Lösung der Gleichung als Bruch zu erhalten.
4	≈	Für eine Darstellung in Dezimalschreibweise klicken Sie auf die Ausgabe der 2. Zeile und danach auf das Werkzeug *Numerisch*. Das Ergebnis wird numerisch berechnet.

Hinweis: Es gibt noch weitere Möglichkeiten, beispielsweise *Löse* oder *NLöse*, Gleichungen in der CAS-Ansicht zu lösen. Mehr Information darüber ist hier zu finden: http://wiki.geogebra.org/de/Hauptseite

Herausforderung: Überlegen Sie warum das Lösen von Gleichungen mit der CAS-Ansicht für Schüler von Vorteil bzw. von Nachteil sein könnte!

3. ggT und kgV

In der Schule werden der größte gemeinsame Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von zwei oder mehreren Zahlen durch das Faktorisieren dieser berechnet. Das Produkt der auftretenden Primzahlen mit entsprechenden Potenzen ergibt dann ggT beziehungsweise kgV:

- Für den ggT nimmt man die Primfaktoren, die in beiden Zerlegungen auftreten, und als zugehörigen Exponenten den jeweils kleineren der Ausgangsexponenten.
- Für das kgV nimmt man die Primfaktoren, die in mindestens einer der beiden Zerlegungen auftreten, und als zugehörigen Exponenten den jeweils größeren der Ausgangsexponenten.

Vorbereitung

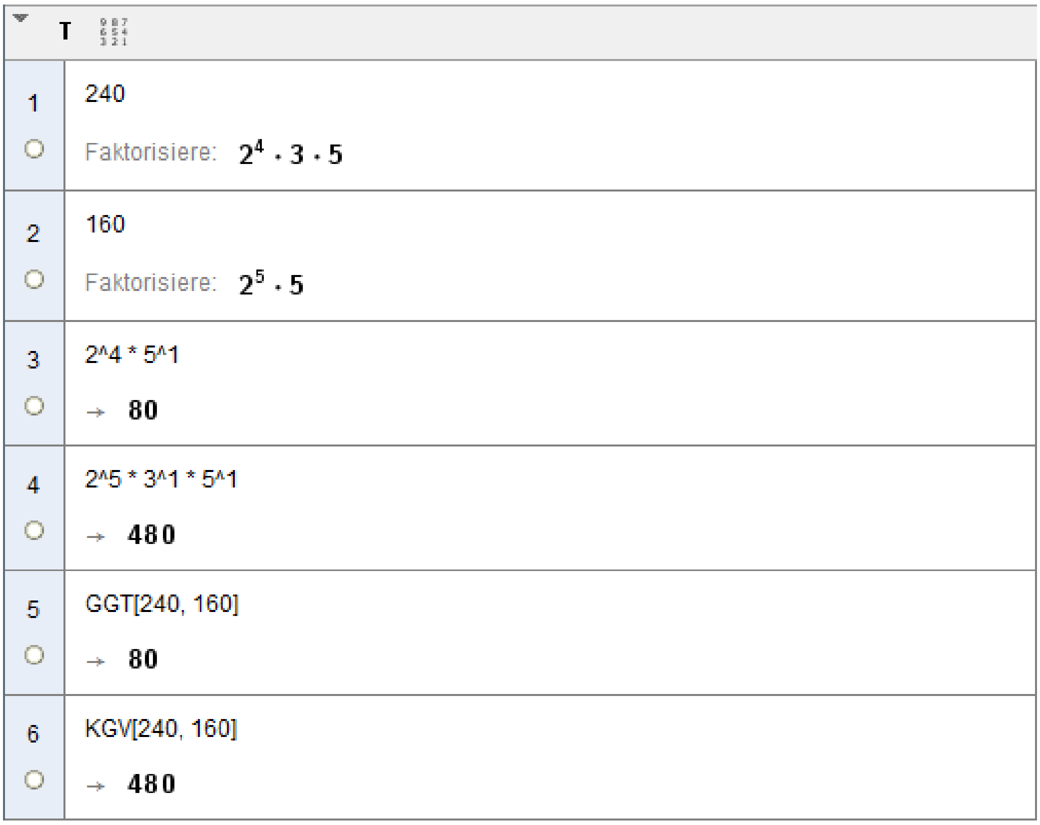
- Öffnen Sie eine neue GeoGebra Datei.
- Seitenleiste *Perspektiven* – *CAS & Grafik.*

Einführung des neuen Werkzeuges

15 3·5	**Faktorisiere**	**Neu!**

Konstruktionsanleitung

Nach der Konstruktionsanleitung sollte Ihre CAS-Ansicht folgende Zeilen beinhalten:



1	15 $3 \cdot 5$	Wählen Sie eine beliebige Zahl, z.B. `240` und klicken Sie in der Werkzeugleiste auf das Symbol *Faktorisiere*.
2	15 $3 \cdot 5$	Wähle Sie eine weitere beliebige Zahl, z.B. `160` und klicken Sie in der Werkzeugleiste auf das Symbol *Faktorisiere*.
3		Berechnen Sie den ggT der beiden Zahlen durch das Multiplizieren der Primfaktoren hoch den kleineren Potenzen `2^4 * 5^1` <u>Hinweis</u>: Verwenden Sie "^" um Potenzen einzugeben.
4		Berechnen Sie das kgV der beiden Zahlen durch das Multiplizieren der Primfaktoren hoch den größeren Potenzen `2^5 * 3^1 * 5^1`
5		Mit dem Befehl *GGT* kann der größte gemeinsame Teiler automatisch berechnet werden. Geben Sie `GGT[240,160]` ein und klicken Sie auf *Berechne*.
6		Mit dem Befehl *KGV* kann das kleinste gemeinsame Vielfache automatisch berechnet werden. Geben Sie `KGV[240,160]` ein und klicken Sie auf *Berechne*.

<u>Herausforderung:</u> Mit der CAS-Ansicht können ggT und kgV auch für beliebige Polynome berechnet werden. Berechnen Sie ggT und kgV für `a x^2 - 2ab x + a b^2` und `x^2 - b^2` wie in der Konstruktionsanleitung beschrieben!

<u>Hinweis:</u> Achten Sie darauf, dass weder *a* noch *b* zuvor einem Wert zugewiesen wurden. Im Zweifelsfall öffnen Sie einfach ein neues Fenster. Die Lösungen lauten $x - b$ und $a\,x^3 - a\,b\,x^2 - a\,b^2\,x + a\,b^3$.

Zurück in die Schule…

(a) Da die Berechnung von ggT und kgV durch Faktorisieren für große Zahlen umständlich ist, gibt es die Möglichkeit den *Euklidischen Algorithmus* zu verwenden. Erinnern oder informieren Sie sich, wie und warum dieses Verfahren funktioniert. Welche Vorgehensweise sagt Ihnen mehr zu?

(b) Überlegen Sie sich Vor- und Nachteile davon, die Berechnung des ggT und kgV in der Schule mit einem elektronischen Hilfsmittel, wie GeoGebra, durchzuführen.

4. Schneiden von Polynomfunktionen

Schneiden Sie die Parabel f(x) := (2 x^2 – 3 x + 4) / 2 mit der Gerade g(x) := x / 2 + 2.

Vorbereitungen

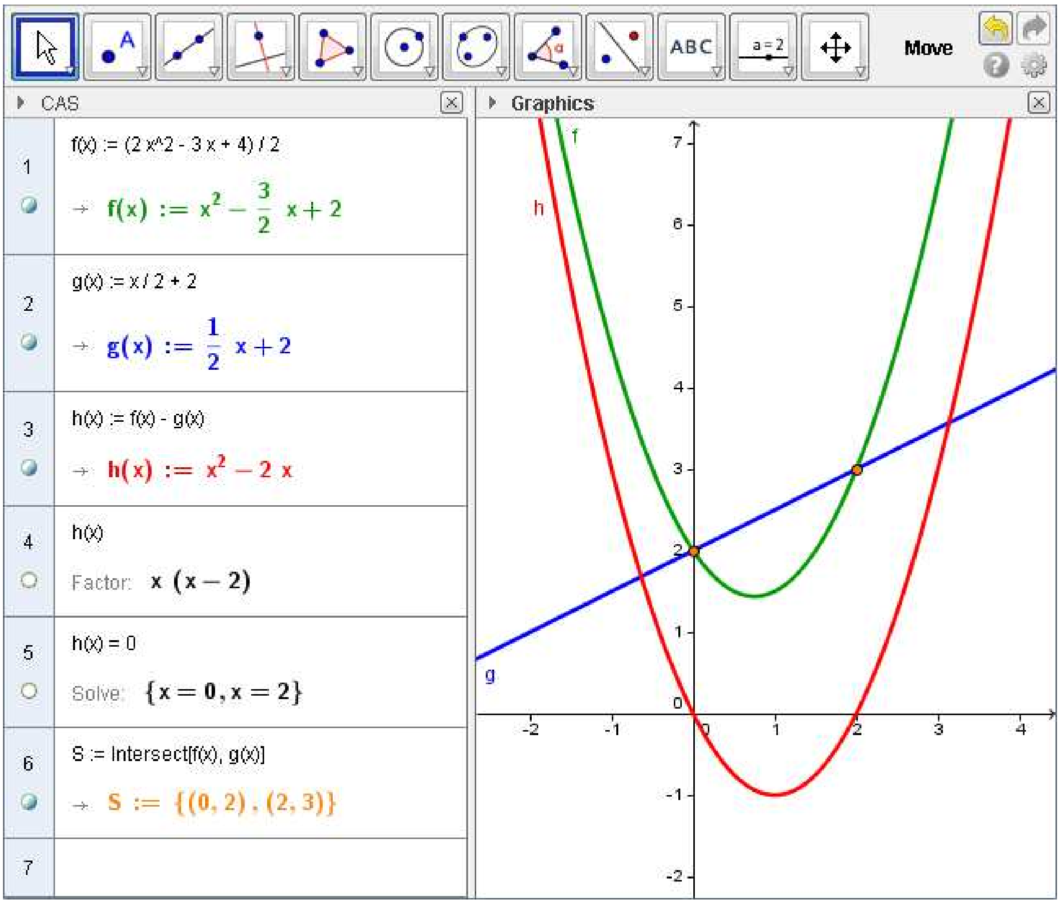
- Öffnen Sie eine neue GeoGebra Datei.
- Seitenleiste *Perspektiven* - *CAS & Grafik*

Einführung der neuen Werkzeuge

X =	Löse	Neu!

Konstruktionsanleitung

Nach der Konstruktionsanleitung sollte Ihre *CAS-Ansicht* folgende Zeilen beinhalten:



1		Definieren Sie *f* durch `f(x) := (2 x^2 – 3 x + 4) / 2` <u>Hinweis</u>: „`:=`" wird verwendet um etwas zu definieren, „=" wird für Gleichungen verwendet.
2		Definieren Sie *g* durch `g(x) := x / 2 + 2`
3		Definieren Sie *h* durch `h(x) := f(x) - g(x)`
4	15 3·5	Schreiben Sie `h(x)` in die vierte Zeile und klicken Sie auf das Werkzeug *Faktorisiere*. Aus dieser Zeile können die Nullstellen der Funktionen bereits abgelesen werden.
5	x =	Schreiben Sie `h(x) = 0` und klicken Sie auf das Werkzeug *Löse*. Dadurch erhalten Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte.
6		Den Schnittpunkt erhalten Sie durch den Befehl *Schneide*: `S := Schneide[f(x), g(x)]`
7		Variieren Sie Farbe, Linienstärke, etc. der Objekte, um die Konstruktion übersichtlicher zu gestalten.

<u>Hinweis:</u> In der *CAS-Ansicht* eingegebenen Funktionen werden, wie in der *Eingabezeile*, definiert und in der *Grafik-Ansicht* angezeigt. Werden Farben in anderen Ansichten verändert, wird dies auch in der *CAS-Ansicht* sichtbar,

dadurch wird der Zusammenhang in den verschiedenen Ansichten hervorgehoben.

<u>Herausforderung:</u> Erklären Sie, weshalb die Nullstellen von *h* den Schnittpunkten von *f* und *g* entsprechen.

<u>Herausforderung:</u> Beim Erarbeiten der Konstruktionsschritte wurden bereits drei Möglichkeiten zwei Funktionen *f* und *g* zu schneiden vorgestellt. Finden Sie eine weitere!

Zurück in die Schule…

(a) Untersuchen Sie die folgenden beiden Funktionsgleichungen. Sind ihre Terme äquivalent? Wenn ja, versuchen Sie die Gleichheit der Termdarstellungen mit den Werkzeugen der CAS-Ansicht zu veranschaulichen. Wenn nein, finden Sie eine Stelle, für die die Gleichungen unterschiedliche Werte liefern.

i. $f_1(x) = (2-x)(2+x)$ $\quad$ $f_2(x) = 4 - x^2$
ii. $g_1(t) = t^2 - 4t + 2$ $\quad$ $g_2(t) = (t-2)^2$
iii. $h_1(s) = s - a^2$ $\quad$ $h_2(a) = a - s^2$

(b) Betrachten Sie die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^2$

i. Für welche Werte von t ist $g(t) > 0$?
ii. Für jede reelle Zahl t gilt $g(-t) = g(t)$. Warum?

5. Lösen von Exponentialgleichungen

Schach und die Weizenkornlegende

Schach ist in Europa und vielen Teilen der Welt allgemein bekannt und das bedeutendste Brettspiel. Der Ursprung des Spiels geht auf folgende Legende und unzähligen Abwandlungen dieser zurück:
Es war einmal ein indischer Herrscher, der sein Land und seine Bürger in Armut und Elend führte. Eines Tages wollte ein weiser Mann die Aufmerksamkeit des Herrschers auf sich ziehen, doch er fürchtete ihn zu erzürnen. Deshalb erfand er das Schachspiel. Während im Schach die wichtigste Figur ohne Zweifel der König ist, ist diese dennoch hilflos ohne die anderen Figuren. Sogar Bauern spielen eine äußerst wichtige Rolle.
Nachdem der indische Herrscher mit dem Spiel vertraut war, verstand er die Botschaft des Mannes und wurde sanftmütiger und gnädiger. Der Herrscher war so beeindruckt, dass er dem Mann einen beliebigen Wunsch erfüllen wollte. Als der weise Mann seinen Wunsch, ein Korn auf dem ersten Feld, zwei auf dem Zweiten, vier auf dem Dritten und so weiter, äußerte, dachte der Herrscher, welch bescheidener und demütiger Mann dieser sei und gewährte ihn gerne.

Wie viele Körner befinden sich auf dem fünften Feld?
Auf welchem Feld liegen bereits 1024 Körner?

Vorbereitungen

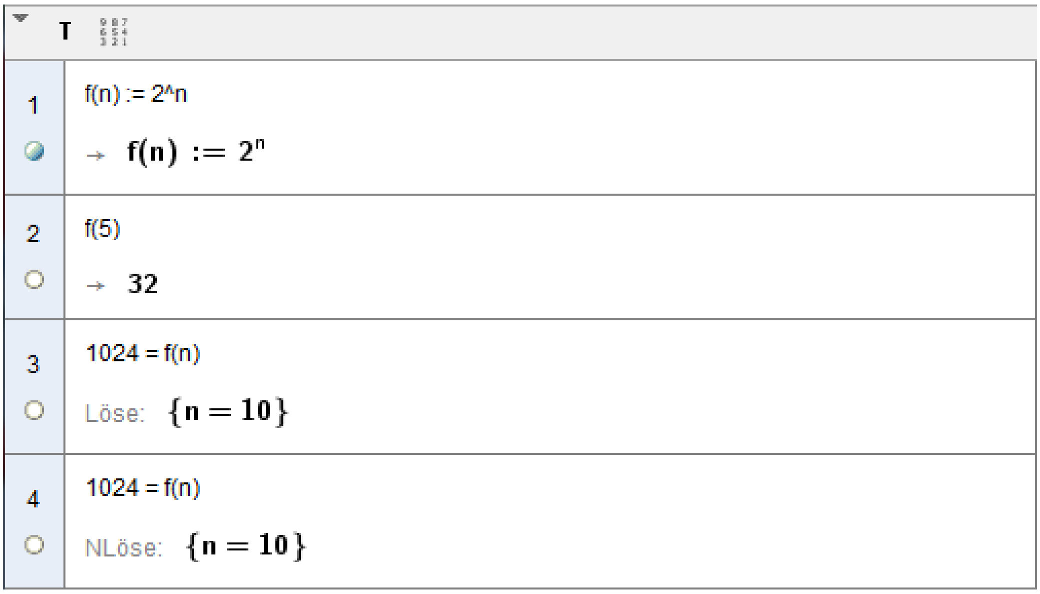
- Öffnen Sie eine neue GeoGebra Datei.
- Seitenleiste *Perspektiven* - *CAS & Grafik*

Einführung der neuen Werkzeuge

Löse numerisch	**Neu!**

Konstruktionsanleitung

Nach der Konstruktionsanleitung sollte Ihre *CAS-Ansicht* folgende Zeilen beinhalten:



1		Definieren Sie *f* durch `f(n) := 2^n`. Hinweis: „`:=`“ wird verwendet um etwas zu definieren, „=“ wird für Gleichungen verwendet.
2		Berechnen Sie die Anzahl der Körner auf dem fünften Feld mit `f(5)`.
3		Schreiben Sie `1024 = f(n)` und finden Sie ein *n*, das die Gleichung erfüllt unter Verwendung des Werkzeugs *Löse*. Hinweis: Sie können auch den Befehl `Löse[1024 = f(n)]` verwenden.

4	x≈	Benützen Sie alternativ das Werkzeug *Löse numerisch* um die Gleichung numerisch zu lösen. Hinweis: Sie können auch den Befehl `NLöse[1024 = f(n)]` verwenden.

Hinweis: Legen Sie die Variable, nach der gelöst werden soll, fest, indem sie diese als zweites Argument anführen, zum Beispiel `Löse[1024 = f(n), n]` Das ist sowohl für *Löse* als auch für *NLöse* möglich!

Herausforderung: Definieren Sie *g* durch `g(t) := c * a^t` Verwenden Sie *Löse* und *NLöse* um

a) ein *t* zu finden für das *g(t) = c / a* gilt,
b) ein *c* zu finden für das *g(2) = 225* gilt und
c) ein *a* zu finden für das *g(2) = 255* gilt.

6. Lösen von Gleichungssystemen

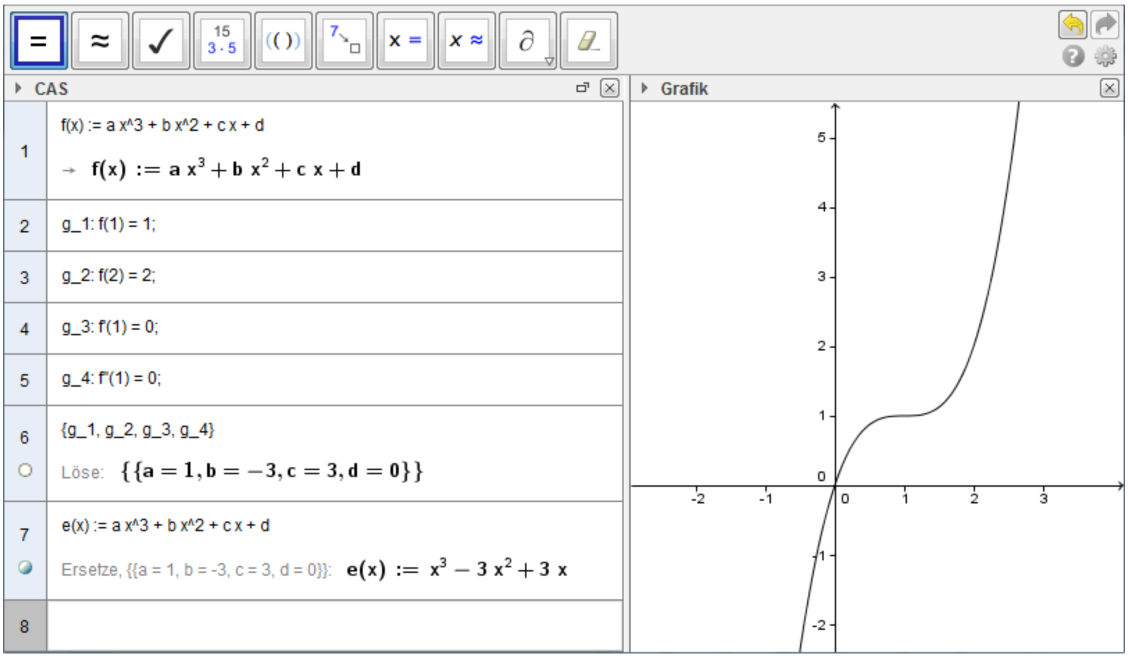
Bei dieser Aufgabe lernen Sie, wie man Gleichungssysteme, sowohl nichtlineare als auch abgeleitete Gleichungen, mit nur einem Klick lösen kann. Finden Sie eine Polynomfunktion dritten Grades mit Sattelpunkt (1, 1) und dem Punkt (2, 2).

Vorbereitungen

- Öffnen Sie eine neue GeoGebra Datei.
- Seitenleiste *Perspektiven* - x= *CAS & Grafik*

Konstruktionsanleitung

Nach der Konstruktionsanleitung sollte Ihre *CAS-Ansicht* folgende Zeilen beinhalten:



1		Definieren Sie *f* durch `f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d`
2		Der Funktionswert bei *x* = *1* ist *1*: `g_1: f(1) = 1;` <u>Hinweis:</u> Verwenden Sie „`:`“ um Ihre Gleichung zu benennen und „`;`“ um die Ausgabe zu unterdrücken.
3		Der Funktionswert bei *x* = *2* ist *2*: `g_2: f(2) = 2;`
4		Die erste Ableitung verschwindet bei *x* = *1*: `g_3: f'(1) = 0;` <u>Hinweis:</u> Die Ableitung von *f* kann als *f* Strich „*f'*“ geschrieben werden.
5		Die zweite Ableitung verschwindet bei *x* = *1*: `g_4: f''(1) = 0;`
6	x =	Wählen Sie die Zeilen zwei bis fünf aus und verwenden Sie das Werkzeug *Löse*. <u>Hinweis</u>: Bei gedrückter *Strg*-Taste können mehrere Zeilen, durch klicken auf die Zeilennummer, ausgewählt werden. <u>Hinweis</u>: Dasselbe wird durch die Eingabe `Löse[{g_1, g_2, g_3, g_4}, {a, b, c, d}]` erzielt.
7		Ersetzten Sie die undefinierten Variablen in der Formel um *f* zu zeichnen. Dazu ziehen Sie die Ausgabe von Zeile sechs auf die

	Definition von *f* in Zeile eins. Hinweis: Um ein Objekt zu ziehen, wählen Sie es mit der Maustaste aus und halten Sie diese gedrückt bis sich das Objekt am gewünschten Ort befindet.

Hinweis: Sie können Ableitungen einer Funktion oder eines Terms auch mit dem Werkzeug *Ableitung* berechnen. Um eine Funktionen oder einen Term zu integrieren, wenden Sie den *Integral* Befehl oder das Werkzeug an. Testen Sie nun die Werkzeuge, um sich mit diesen vertraut zu machen.

Herausforderung: Im letzten Schritt könnten Sie auch `f(x)` in eine neue Zeile eingeben und die Ausgabe der sechsten Zeile darüber ziehen. Es gibt auch die Möglichkeit undefinierte Variablen durch den Befehl beziehungsweise das Werkzeug, *Ersetze* zu ersetzen. Wenden Sie alle drei Möglichkeiten an, um *f* zu zeichnen!

Herausforderung: Sie haben eine Lösung gefunden und gezeichnet. Ist diese Lösung eindeutig?

7. Matrizenrechnung

Matrizen sind in der Mathematik von großer Bedeutung und werden in verschiedensten Bereichen eingesetzt. Beispiele hierzu umfassen die kurze und präzise Darstellung von linearen Gleichungssystemen ebenso wie die Lösung dieser.
In diesem Abschnitt werden Sie lernen, wie Sie dieses mächtige Werkzeug in der CAS Ansicht einsetzen können.

Ein beliebiges vollständig bestimmtes System von unabhängigen linearen Gleichungen, zum Beispiel

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 7, \end{aligned}$$

kann durch folgende Matrizenmultiplikation beschrieben werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B}.$$

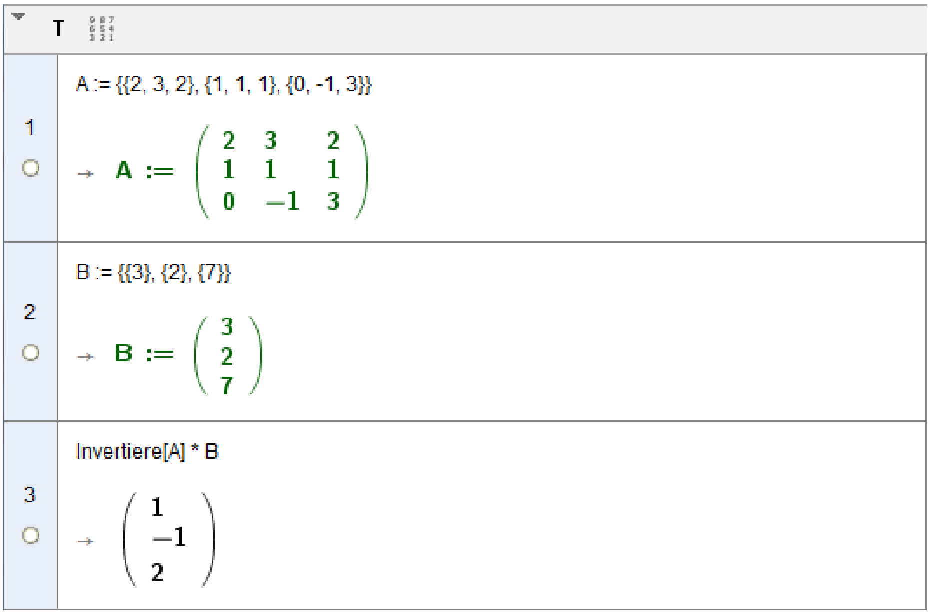
Im Allgemeinen erlaubt uns dies, statt des Gleichungssystemes die Matrizengleichung *A * X = B* zu lösen, etwa durch Berechnen der inversen Matrix A^{-1} und Multiplikation beider Seiten mit dieser von links.

Vorbereitungen

- Öffnen Sie eine neue GeoGebra Datei.
- Seitenleiste *Perspektiven* - *CAS & Grafik*

Konstruktionsanleitung

Nach der Konstruktionsanleitung sollte Ihre *CAS-Ansicht* folgende Zeilen beinhalten:



1	Geben Sie die Koeffizientenmatrix *A* `A := {{2, 3, 2}, {1, 1, 1}, {0, -1, 3}}` ein.
2	Definieren Sie den Spaltenvektor *B* durch `B := {{3}, {2}, {7}}`
3	Berechnen Sie das Ergebnis mit `Invertiere[A] * B`

Hinweis: Eine Matrix kann in GeoGebra als Liste von Listen, welche die Zeilen der Matrix enthalten, eingegeben werden. Man erhält die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit der Eingabe `{{a, b}, {c, d}}`.

Herausforderung

Lösen Sie das folgende System durch Verwendung von Matrizen in der *CAS-Ansicht*

$$ax + 2y = c$$
$$-\sqrt{2y} = 2a.$$